

# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA



## *IV Examen Parcial Precálculo anual*

SÁBADO 29 DE OCTUBRE  
PERÍODO 2022

TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE: 3 HORAS  
VALOR: 50 PUNTOS

### **Instrucciones Generales:**

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (19 puntos), respuesta breve (12 puntos) y de desarrollo (19 puntos).
3. Debe trasladar sus respuestas al folleto de respuestas de selección única y respuesta breve. El desarrollo debe ser resuelto completamente en dicho folleto.
4. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen **bien definidas en  $\mathbb{R}$** .
5. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
6. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
7. **No** se permite el uso de celulares.
8. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
9. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
10. La prueba debe resolverse individualmente.
11. Dispone de **3 horas** para resolver la prueba.
12. Durante la aplicación de la prueba los estudiantes deben cumplir con los protocolos sanitarios establecidos, en particular, la forma correcta de estornudar y toser y el distanciamiento. A quien no cumpla con estos protocolos se le retirará la prueba y se le indicará que abandone el recinto donde se está aplicando.

Nombre: \_\_\_\_\_

Código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_

I Parte. Selección única.

Valor: 19 puntos

A continuación se le presentan 19 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa correctamente cada enunciado e indíquela en la hoja de respuestas.

1. El número real  $t = \frac{29\pi}{6}$  se asocia al siguiente punto de la circunferencia trigonométrica

(A)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{29\pi}{6} - 4\pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

(B)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



(C)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(D)  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

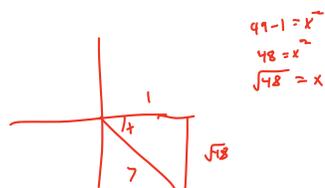
2. Si  $\cos(t) = \frac{1}{7}$  y  $t$  pertenece al cuarto cuadrante, entonces  $\sin(t)$  es equivalente a

(A)  $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

(B)  $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

(C)  $-\frac{7\sqrt{3}}{12}$

(D)  $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$



$$\begin{aligned} 49 - 1 &= x^2 \\ 48 &= x^2 \\ \sqrt{48} &= x \end{aligned}$$

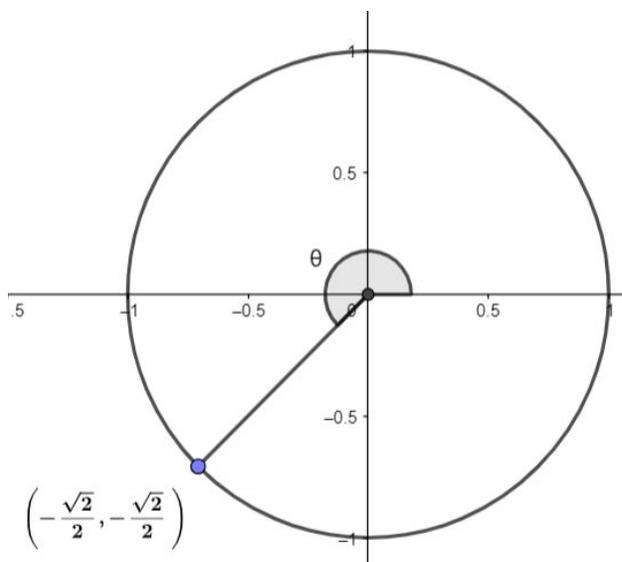
$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{-\sqrt{48}}{7} \\ &= \frac{-4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 49 \sqrt{2} \sqrt{2} \\ 24 \sqrt{2} \sqrt{2} \\ 12 \sqrt{2} \sqrt{2} \\ 6 \sqrt{2} \sqrt{2} \\ 3 \end{array} \rightarrow 4\sqrt{3}$$

3. Al calcular  $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  se obtiene

- (A)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$   $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$  |  $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$   
 $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$  |  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (B)  $-\frac{\sqrt{6}}{4}$   $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$
- (C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$   $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (D)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

4. Observe la siguiente figura



Con base en la figura anterior  $\theta$  toma el siguiente valor

- (A)  $\frac{\pi}{4}$   $\times - \pi = \frac{\pi}{4}$
- (B)  $\frac{3\pi}{4}$   $\frac{\pi}{4} + \pi = \times$
- (C)  $\frac{5\pi}{4}$   $\frac{5\pi}{4} = \times$
- (D)  $-\frac{\pi}{4}$

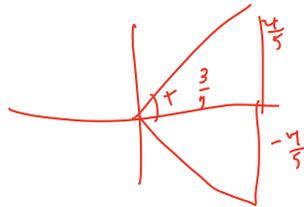
5. Si  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  es el punto terminal determinado por  $t$  en la circunferencia trigonométrica, entonces el punto terminal para  $-t$  corresponde a

(A)  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(B)  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

(C)  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(D)  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$



6. Al calcular  $\sin^4(\pi) + \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  se obtiene

(A)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

*sen π = 0*

$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

(B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0 + \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$



(C)  $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(D)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

7. Considere las siguientes afirmaciones sobre la función  $f$  cuyo criterio corresponde a  $f(x) = \tan(x)$ .

I. Un elemento del dominio corresponde a  $x = -1, 3$ . ✓

II. La recta  $x = -2\pi$  es una asíntota vertical. ✗

III.  $f$  es positiva en  $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ . ✓

$$\frac{\sin x}{\cos x} \neq 0$$

↓

$$\cos x \neq 0$$
$$\frac{2k+1}{2}\pi$$

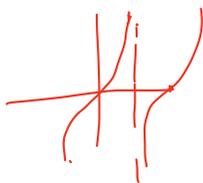
¿Cuales son verdaderas?

(A) II y III

(B) I y III

(C) Solo II

(D) Solo III



8. Considere la siguiente información de una función trigonométrica  $g$ .

I. Su período es  $2\pi$ .

II. El rango corresponde a  $[-1, 1]$ .

III. Es una función par.

¿Cual es el criterio de  $g$ ?

(A)  $\cos(x)$

(B)  $\sin(x)$

(C)  $\sec(x)$

(D)  $\tan(x)$

9. El dominio máximo de la función definida por  $f(x) = \cot(x)$  corresponde a

(A)  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$

(B)  $\mathbb{R}$

(C)  $\mathbb{R} - ]-1, 1[$

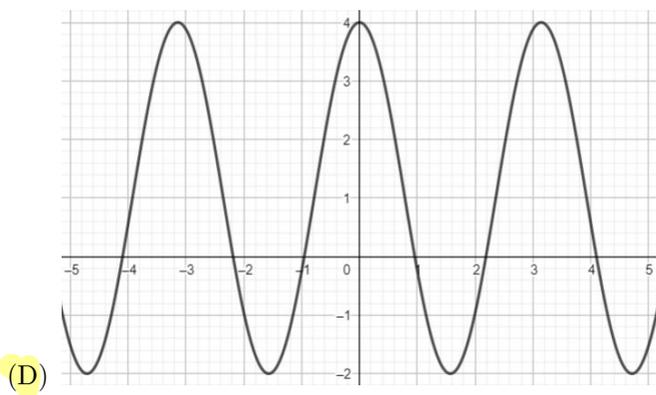
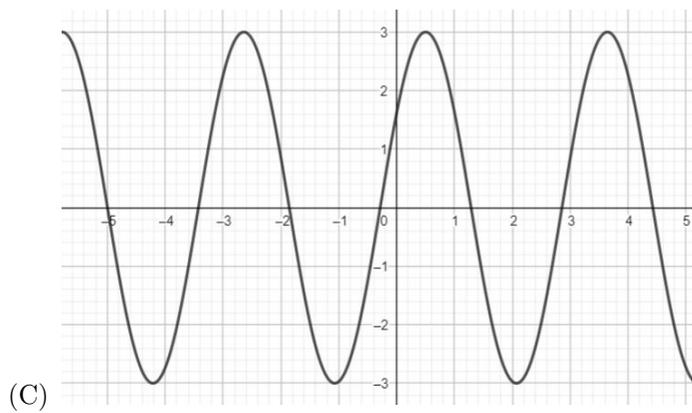
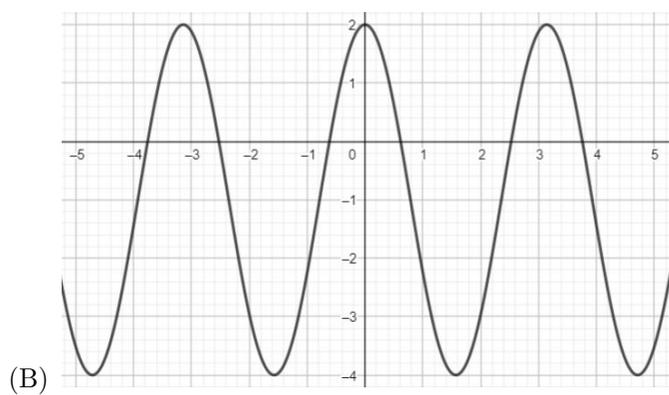
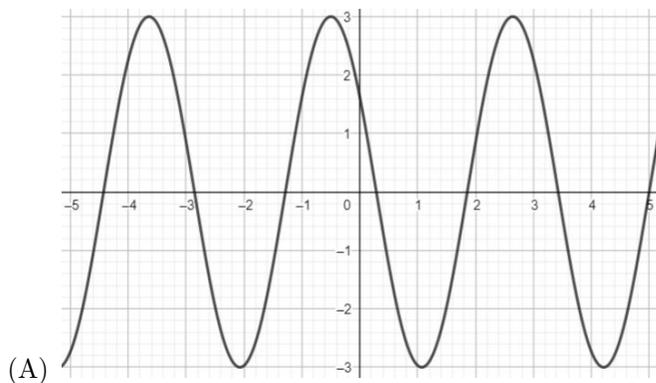
(D)  $\mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\cos x}{\sin x}$$

sin x ≠ 0

$$k\pi \neq 0$$

10. La gráfica de la función  $h$  cuyo criterio es  $h(x) = 3 \cos(2x) + 1$  corresponde a



11. Si se sabe que  $\arccos(\theta) = \frac{2\pi}{3}$ , entonces  $\theta$  toma el siguiente valor

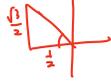
(A)  $\frac{1}{2}$

$\cos \frac{2\pi}{3} = \theta$

(B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$       $-\frac{1}{2} = \theta$

(C)  $-\frac{1}{2}$



(D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Considere las siguientes afirmaciones:

I.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot(x)$  ✗

II.  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$  ✓

III.  $\tan(-x) = -\tan(x)$  ✓

¿Cuáles son verdaderas?

(A) I, II y III

(B) I y II

(C) Solo III

(D) II y III

13. La expresión  $\frac{\tan(\theta)}{\sec(-\theta)}$  es equivalente a

(A)  $-\sin(\theta)$

$\frac{\tan \theta}{-\sec \theta}$

(B)  $\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$

$= \frac{\tan \theta}{-\frac{1}{\cos \theta}}$

(C)  $\sin(\theta)$

$= \frac{\tan \theta \cdot \cos \theta}{1}$

$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta$

(D)  $-\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$

$= \sin \theta$

14. El valor exacto de  $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{18}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{9}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{18}\right)\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)}$  corresponde a

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}\right)$

(B)  $\tan\left(\frac{\pi}{18}\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{18}\right)$

$\tan\left(\frac{3\pi}{18}\right)$

(C)  $\sqrt{3}$

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(D)  $-\tan\left(\frac{\pi}{18}\right)$



$= \frac{1}{2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

15. Si se sabe que  $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$  y  $\csc(\alpha) < 0$ , entonces al calcular  $\sin(2\alpha)$  se obtiene

(A)  $\frac{8}{5}$

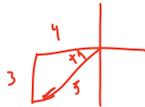
I III  $\frac{1}{\sin \alpha} < 0$   
III IV

(B)  $-\frac{24}{25}$

$2 \sin \alpha \cos \alpha$

$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$\frac{24}{25}$



(C)  $-\frac{8}{5}$

(D)  $\frac{24}{25}$

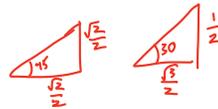
16. El valor exacto de  $\cos(75^\circ)$  corresponde a

(A)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\cos(45 + 30)$

$\cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30$

(B)  $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$



(C)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

(D)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{s} + \frac{c}{s} = \frac{1}{s}$$

$$1 + \cot = \sec$$

17. La expresión  $\sin^2(x) (1 + \cot^2(x))$  es equivalente a

(A) 1  $\sin^2 x (\sec^2 x)$

(B)  $\tan^2(x)$   $\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$   
|

(C)  $\frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}$

(D)  $\cos^2(x)$

18. Considere las siguientes ecuaciones:

I.  $\tan(x) = -6$

II.  $\sin(x) = 3$

III.  $\cos(x) = 0,86$

¿Cuáles de las ecuaciones anteriores tiene por conjunto solución el conjunto vacío?

(A) I y II

(B) II y III

(C) Solo II

(D) Ninguna

19. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores para los cuales las funciones definidas por  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$  se intersecan?

(A)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

(B)  $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

(C)  $\left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

(D)  $\left\{ \frac{7\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\sin x = \cos x$   $\cos x \neq 0$   
 $\frac{2k\pi}{2} \neq 0$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$

$\tan x = 1$

I:  $\frac{\pi}{4}$

III:  $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

## II Parte. Respuesta Breve.

Valor: 12 puntos

A continuación se le presentan 6 enunciados (12 preguntas en total). Anote en el espacio en blanco la opción que responda correctamente cada uno. Indique la respuesta en la hoja de respuestas.

1. Sea  $P(x, y)$  un punto que pertenece a la circunferencia trigonométrica y se ubica en el segundo cuadrante.

Si se sabe que  $y = \frac{1}{3}$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-x)^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{7}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$-\frac{\sqrt{6}}{3}$

---

2. Si  $P(-1, 0)$  es un punto que pertenece a la circunferencia trigonométrica asociado con el número real  $t$ .

Determine:  $t = \pi$   $\ominus$

- (a) El valor numérico de  $\sec(t)$

$$\frac{1}{\cos \pi} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1$$

$-1$

---

- (b) Un valor numérico de  $t$

$\pi$

---

3. Para la función  $f$  cuyo criterio es  $f(x) = \arctan(x)$

- (a) ¿Cuál es el dominio?

$\mathbb{R}$

---

- (b) ¿Cuál es el rango?

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

---

4. Considere la función  $g$  cuyo criterio corresponde a  $g(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 7$ .

- (a) ¿Cuál es la amplitud?

$3$

---

- (b) ¿Cuál es el período?

$\pi$

---

- (c) ¿Cuál es el corrimiento de fase?

$\frac{\pi}{4}$  derecha

---

- (d) ¿Hacia dónde se da el desplazamiento de  $g$ ?

$derecha$

---

(e) ¿Cuál es el rango?

$$[4, 10]$$

---

5. El conjunto solución, en  $[0, 2\pi]$ , de la ecuación  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  corresponde a

$$\text{I: } \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{II: } \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

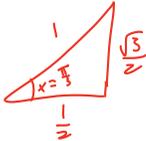
---

6. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $\tan^2(x) - 3 = 0$  en el intervalo de  $[0, \pi]$ ?

$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

2

---



$$\text{I: } \frac{\pi}{3} = x$$

$$\text{II: } \pi - \frac{\pi}{3} = x$$

$$\frac{2\pi}{3} = x$$

$$\text{III: } \pi + \frac{\pi}{3} = x$$

$$\frac{4\pi}{3} = x$$

$$\text{IV: } 2\pi - \frac{\pi}{3} = x$$

$$\frac{5\pi}{3} = x$$

### III Parte. Desarrollo.

Valor: 19 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos de manera clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Halle, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación (expresé los valores en radianes). 7 puntos

$$\tan(2\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta) - \tan(2\theta) + \sqrt{3} = 0$$

2. Verifique que  $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(x)} = 2 \sec(x) \tan(x)$ . 5 puntos

3. Sea  $\alpha$  un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal está ubicado en el tercer cuadrante y  $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$ .  
Determine el valor exacto de la expresión  $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$ . 4 puntos

4. Sea  $-3 \leq x \leq 3$ , verifique que  $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$ . 3 puntos

$$\tan(2\theta) \sin(\theta) - \sqrt{3} \sin(\theta) - \tan(2\theta) + \sqrt{3} = 0 \quad \mathbb{R}$$

$$\tan 2x (\sin x - 1) - \sqrt{3} (\cos x - 1) = 0$$

$$(\tan 2x - \sqrt{3})(\sin x - 1) = 0$$

$$\tan 2x = \sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$



$$I: \frac{\pi}{3} = \alpha$$

$$III: \pi + \frac{\pi}{3} = \alpha$$

$$\frac{4\pi}{3} = \alpha$$

$$\frac{\pi}{3} = 2x \quad ; \quad \frac{4\pi}{3} = 2x$$

$$\frac{\pi}{6} = x \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} = x$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{4\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2. \text{ Verifique que } \frac{1}{1 - \sin(x)} - \frac{1}{1 + \sin(x)} = 2 \sec(x) \tan(x).$$

$$= \frac{(1 + \sin x) - (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

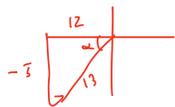
$$= \frac{2 \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= 2 \tan x \cdot \sec x$$

$$3. \text{ Sea } \alpha \text{ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal está ubicado en el tercer cuadrante y } \tan(\alpha) = \frac{5}{12}. \text{ Determine el valor exacto de la expresión } \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}.$$



$$25 + 144 = x^2$$

$$169 = x^2$$

$$13 = x$$

$$= \frac{-5}{13}$$

$$= \frac{-5}{1 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}$$

$$= \frac{-5}{1 + \left(\left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{-5}{1 + \left(\frac{144}{169} - \frac{25}{169}\right)}$$

$$= \frac{-5}{1 + \frac{119}{169}}$$

$$= \frac{-5}{\frac{18}{13} + \frac{288}{169}}$$

$$= \frac{-5}{\frac{15}{13} + \frac{288}{169}}$$

$$= \frac{-845}{3747}$$

$$= \frac{-65}{288}$$

$$4. \text{ Sea } -3 \leq x \leq 3, \text{ verifique que } \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

$$I$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{3}$$



$$y^2 + x^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\sin x + 3 \sin x \cos 2x$$

$$\sin x (1 + 3 \cos 2x) = 0$$

$$\sin x (1 + 3(2\cos^2 x - 1)) = 0$$

$$\sin x (1 + 6\cos^2 x - 3) = 0$$

$$\sin x (6\cos^2 x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ \sin x = 0 \\ \swarrow \\ 0, \pi \end{array}$$

$$\cos^2 x = \frac{2}{6}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ \text{I: } \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{II: } \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \text{III: } -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\pi \quad \text{IV: } -\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\pi \end{array}$$