Instituto Tecnológico de Costa Rica

Tercer examen parcial
Precálculo
Décimo anual

Sábado 29 de setiembre de 2018

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 45 puntos que consta de tres partes: selección única (15 puntos), respuesta corta (10 puntos) y de desarrollo (20 puntos).
3. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen bien definidas en $\mathbb{R}$.
4. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
5. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
6. No se permite el uso de celulares.
7. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
8. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
9. La prueba debe resolverse individualmente.
10. Dispone de 3 horas para resolver la prueba.

Nombre: ____

Código: ______________________

Colegio: ____

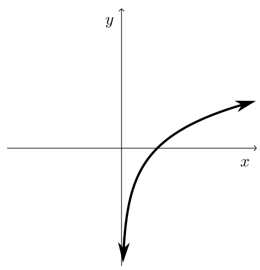
I Parte. Selección Única.

Valor: 15 puntos

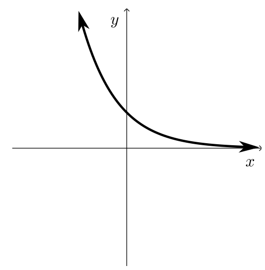
A continuación se le presentan 15 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Sea la función $f : D_f \to \mathbb{R}$, donde D_f es el dominio máximo de la función. Su criterio es: $f(x) = e^{-x}$. Por lo tanto, su gráfica corresponde a

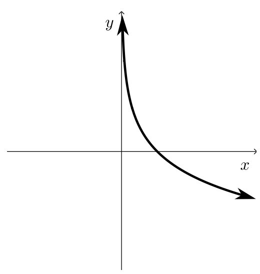
(A)



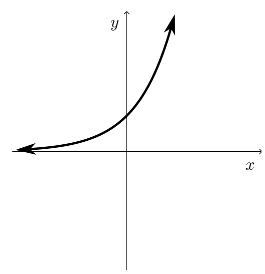
(C)



(B)



(D)



2. Sea la función $g : D_g \to \mathbb{R}$, donde D_g es el dominio máximo de la función. Si su criterio es: $g(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\sqrt{-x}}$, el conjunto D_g corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

$-x \geq 0$

(B) $[0, +\infty[$

$x \leq 0$

(C) $]-\infty, 0]$

$]-\infty, 0[$

(D) $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

3. Si $\log_2(x) = 3$, entonces el valor de x corresponde a

(A) 8

$\log_2 x = 3$

$2^3 = x$

$8 = x$

(B) 9

(C) 5

(D) 1

4. Dada la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con criterio $h(x) = \log_a(x)$, donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Si la gráfica de la función h es creciente, entonces con certeza se puede concluir

(A) $h(a) = 0$

(B) $h(1) = a$

(C) $0 < a < 1$

(D) $a > 1$

5. La expresión $\dfrac{\log_3(4)}{\log_3(2)}$ es equivalente a

(A) $\log_3(4) - \log_3(2)$

(B) $\log_2(4)$

(C) $\log_3(4) + \log_3(2)$

(D) $\log_4(2)$

6. La expresión $\ln\left(\dfrac{x}{yz}\right)$ es equivalente a

(A) $\ln(x) - \ln(y) - \ln(z)$ $\ln x - \ln y - \ln z$

(B) $\ln(x) - \ln(y) + \ln(z)$

(C) $\ln(x) + \ln(y) - \ln(z)$

(D) $\ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$

7. La expresión $4^{\log_2(x)}$ es equivalente a

$4^{\log_2(x)}$

$2^{2\log_2 x}$

$\cancel{2}^{\log_2 x^2}$

(A) x

(B) $2x$

(C) $\sqrt{x}$

(D) x^2

8. El conjunto solución de la ecuación $5^{x-3} = 25^{2x-1}$ corresponde a

$5^{x-3} = 5^{2(2x-1)}$

$5^{x-3} = 5^{4x-2}$

$x-3 = 4x-2$

$-1 = 3x$

$\frac{-1}{3} = x$

(A) $\{-2\}$

(B) $\mathbb{R}$

(C) $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

(D) $\varnothing$

9. El conjunto solución de la ecuación $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2)$ corresponde a

$\cancel{\ln}(x^2 - x) = \cancel{\ln} 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x \quad -2$

$x \quad 1$

$x = 2 \quad x = -1$

(A) $\{2\}$

(B) $\{-1\}$

(C) $\{-1, 2\}$

(D) $\varnothing$

10. Una población de 1000 individuos empieza su crecimiento siguiendo la ecuación:

$$N = 1000e^{2t}$$

donde N es el número de individuos t años después. ¿Cuántos años deben pasar para tener 2000 habitantes?

(A) $1000e^{4000}$

(B) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

(C) e^2

(D) $\dfrac{\ln(2000)}{2}$

$2000 = 1000e^{2t}$

$2 = e^{2t}$

$\ln 2 = 2t$

$\frac{\ln 2}{2} = t$

11. Suponiendo que $\log(2) = 0,301$ y $\log(3) = 0,477$, entonces el valor numérico aproximado de $\log(6)$ corresponde a

$\log 6 = \log 2 + \log 3$

$0.301 + 0.417$

0.778

(A) $0,631$

(B) $0,144$

(C) $0,176$

(D) $0,778$

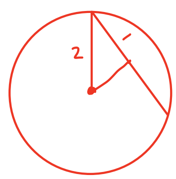
12. ¿Cuál es la distancia, en metros, de una cuerda de 2 metros al centro de una circunferencia de radio 2 metros?

$1^2 + x^2 = 2^2$

$1 + x^2 = 4$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$



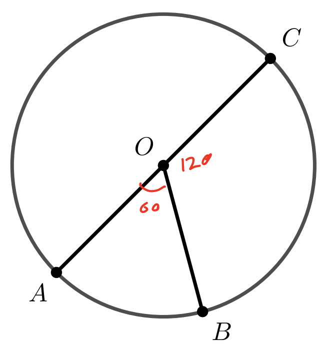
(A) 2

(B) 4

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2\sqrt{3}$

13. Considere el siguiente círculo de centro O.



Si el arco menor $\widehat{AB}$ mide $60°$, la medida del ángulo $\measuredangle BOC$ corresponde a

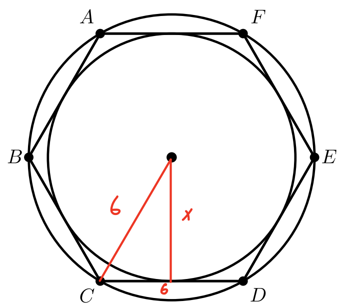
(A) $60°$

(B) $120°$

(C) $30°$

(D) $240°$

14. Considere la siguiente figura, la cual consiste en el hexágono regular $ABCDEF$ inscrito en un círculo y circunscrito en otro círculo.



Si la medida del lado del hexágono es 6 centímetros, entonces la medida del radio del círculo inscrito al polígono corresponde a

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

(A) $3\sqrt{3}$ $\quad h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

$h = 3\sqrt{3}$

(B) 3

(C) 6

(D) $\sqrt{3}$

15. Un polígono regular de 23 lados, cuya medida de cada lado es 1 mm, tiene un área aproximada de $41,83$ mm^2. La medida aproximada de la apotema corresponde a

(A) $83,66$ $\quad A = \frac{P \cdot ap}{2} \quad P = 1 \cdot 23$

$P = 23\text{mm}$

(B) $60,66$ $\quad 41.83 = \frac{23 \cdot ap}{2}$

(C) $1,82$ $\quad 83.66 = 23 \cdot ap$

(D) $3,64$ $\quad 3.637 = ap$

II Parte. Respuesta corta.

Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en la hoja de respuestas.

1. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $3^{5-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-5}$?

2. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\log_2\left(-x^2 - x\right) = 0$?

3. Considere la siguiente figura, en donde el pentágono $ABCDE$ y el triángulo FGH son polígonos regulares.

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

$h = 3\sqrt{3}$

$ap = \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$ap = \sqrt{3}$

$r = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3}$

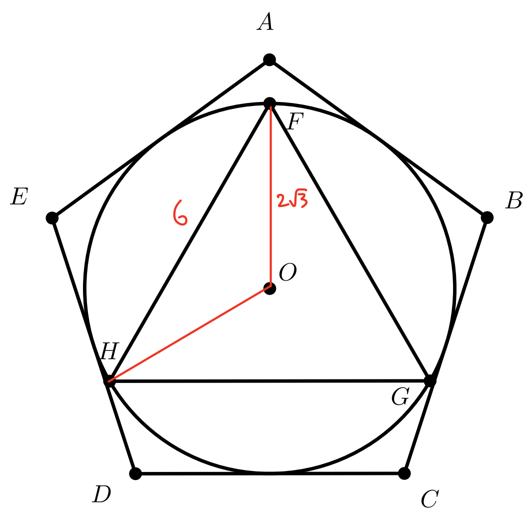
$r = \frac{6\sqrt{3}}{3}$

$r = 2\sqrt{3}$

$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$A = \frac{36\sqrt{3}}{4}$

$A = 9\sqrt{3}$



Si se sabe que el lado del tiángulo FGH mide 6 cm, determine las medidas exactas de:

(a) Apotema del triángulo FGH.

$\sqrt{3}$

(b) Radio del triángulo FGH.

$2\sqrt{3}$

(c) Apotema del pentágono $ABCDE$.

$2\sqrt{3}$

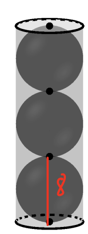
(d) Área del triángulo FGH.

$9\sqrt{3}$ cm²

(e) Radio del círculo menor.

$2\sqrt{3}$

4. Un recipiente de pelotas de tenis tiene forma de cilindro circular recto. Se sabe que este tiene como capacidad máxima 3 pelotas, cada una con radio de 4 centímetros, tal y como se muestra en la figura adjunta. ¿Cuál es la altura del cilindro?



$8 \cdot 3 = 24$

5. Dos conos circulares rectos tienen el mismo vértice y bases paralelas que distan 3 cm entre sí. En el cono mayor la altura es de 5cm y el radio mide 4 cm. ¿Cuánto mide el radio del cono menor?

6. La base de un paralelepípedo es un cuadrado de lado x metros. Si la altura es el doble del lado de la base, ¿cuál es el volumen de este sólido?

1) $3^{5-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$?

$3^{5-x} = 3^{5-x}$

$5 - x = 5 - x$

$5 = 5$

$\mathbb{R}$

2) $\log_2\left(-x^2 - x\right) = 0$?

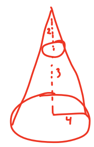
$2^0 = -x^2 - x$

$1 = -x^2 - x$

$x^2 + x + 1 = 0$

$S = \emptyset$

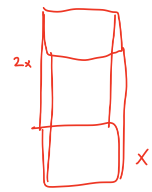
5)



$\frac{4}{5} = \frac{x}{2}$

$8 = 5x$

$\frac{8}{5} = x$



$A \cdot h = V$

$x^2 \cdot 2x = V$

$2x^3 = V$

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

Tercer examen parcial
Precálculo
Modalidad anual

SÁBADO 29 DE SETIEMBRE DE 2018

Nombre: ____

Código:______________________

Colegio:____

I Parte. Selección Única.

Valor: 15 puntos

A continuación se le presentan 15 casillas. Escriba la letra que escogió para su respectivo enunciado.

1		4		7		10		13	
2		5		8		11		14	
3		6		9		12		15	

II Parte. Respuesta corta. Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Escriba sus respuestas en el espacio correspondiente.

1. ______________________________

2. ______________________________

3. (a) ______________________________

   (b) ______________________________

   (c) ______________________________

   (d) ______________________________

   (e) ______________________________

4. ______________________________

5. ______________________________

6. ______________________________

III Parte. Desarrollo.

Total: 20 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Sea $f : D_f \to \mathbb{R} - \{0\}$ una función, con D_f su dominio máximo. Si se sabe que el criterio es:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad .$$

Determine D_f y $f^{-1}(x)$. 5 puntos

Inversa

$$x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{y+3}{y-3} \right)$$

$$2x = \log \left(\frac{y+3}{y-3} \right)$$

$$10^{2x} = \frac{y+3}{y-3}$$

$$10^{2x} \cdot (y-3) = y+3$$

$$y10^{2x} - 10^{2x} \cdot 3 = y+3$$

$$y(10^{2x} - 1) = 3 + 10^{2x} \cdot 3$$

$$y = \frac{3 + 10^{2x} \cdot 3}{10^{2x} - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3 + 10^{2x} \cdot 3}{10^{2x} - 1}$$

Dominio Maximo

	-3		3	
$x+3$	$-$ 0	$+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	$-$		$+$

$]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

2. Escriba la siguiente expresión como un sólo logaritmo, y simplifique. 5 puntos

$$2\log_b\left(\frac{y^3}{x}\right) - 3\log_b\left(x\sqrt[5]{y^2}\right) + \frac{1}{2}\log_b\left(x^4y^2\right) + 1$$

$$\log_b\left(\frac{y^3}{x}\right)^2 - \log_b\left(x\sqrt[5]{y^2}\right)^3 + \log_b\sqrt{x^4y^2} + \log_b b$$

$$\log_b\frac{y^6}{x^2} - \log_b x^3\sqrt[5]{y^6} + \log_b x^2y + \log_b b$$

$$\log_b\frac{y^6\cdot x^2\cdot y\cdot b}{x^2} - \log_b x^3\sqrt[5]{y^6}$$

$$\log_b y^7b - \log_b x^3\sqrt[5]{y^6}$$

$$\log_b\frac{y^7b}{x^3\sqrt[5]{y^6}}$$

$$\log_b\frac{y^7b}{x^3y^{\frac{6}{5}}}$$

$$7-\frac{6}{5}$$

$$\frac{35}{5}-\frac{6}{5}$$

$$\frac{29}{5}$$

$$\log_b\frac{y^{\frac{29}{5}}\cdot b}{x^3}$$

3. Cuando las células cancerosas se someten a radiación, la proporción de células sobrevivientes al tratamiento está dada por la fórmula:

$$P = e^{-kr}$$

donde r es el nivel de radiación y k una constante. Se sabe que cuando el nivel de radiación es 500 Roentgen, sobrevive el 40% de las células cancerosas. Determine el nivel de radiación que se debe aplicar si se espera que sobreviva únicamente el 10%. 5 puntos

Sugerencia: $\ln(0,4) \approx -0,92$ y $\ln(0,1) \approx -2,30$

$$0.4 = e^{-k \cdot 500}$$

$$\ln(0.4) = -k \cdot 500$$

$$\frac{\ln(0.4)}{500} = -k$$

$$\frac{0.92}{500} = k$$

$$0.1 = e^{r \cdot -\frac{0.92}{500}}$$

$$\ln(0.1) = r \cdot -\frac{0.92}{500}$$

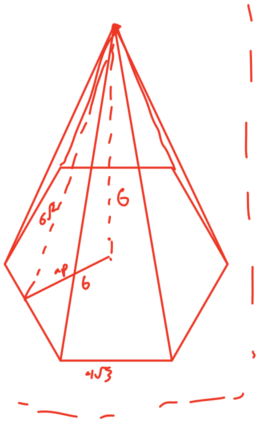
$$\frac{-\ln(0.1)}{\frac{0.92}{500}} = r$$

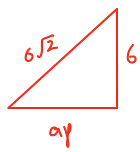
$$\frac{\frac{-(-2.30)}{1}}{\frac{0.92}{500}} = r$$

$$\frac{1150}{0.92} = r$$

$$1250 = r$$

4. Determine el volumen y el área total de una pirámide recta si la base es un hexágono regular, donde la apotema de la pirámide mide $6\sqrt{2}$ centímetros y su altura es 6 centímetros. 5 puntos





$x^2+36=72$

$x^2=36$

$x=6$

$h=\frac{l\sqrt{3}}{2}$

$6=\frac{l\sqrt{3}}{2}$

$12=l\sqrt{3}$

$\frac{12\sqrt{3}}{3}=l$

$4\sqrt{3}=l$

$A=\frac{3\cdot l^2\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{3\cdot(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{3\cdot 48\sqrt{3}}{2}$

$A_b=72\sqrt{3}$

$AL=\frac{6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{3}}{2}$

$AL=\frac{24\sqrt{6}}{2}$

$AL=12\sqrt{6}\cdot 6$

$AL=72\sqrt{6}$

$V=\frac{Ab\cdot h}{3}$

$V=\frac{72\sqrt{3}\cdot 6}{3}$

$V=\frac{432\sqrt{3}}{3}$

$V=144\sqrt{3}\ cm^3$

Area total $=72\sqrt{6}+72\sqrt{3}$ cm