

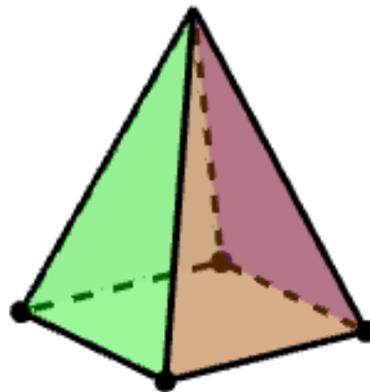


UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática



Precálculo - Undécimo
III Examen Parcial 2018



Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Fórmula: 1

Miércoles 05 de setiembre

Instrucciones

1. El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes, la primera de ellas es de selección única (34 puntos) y la segunda de desarrollo (18 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto. Fírmela en el espacio correspondiente utilizando bolígrafo de tinta azul o negra indeleble.
5. En los ítems de selección, usted deberá rellenar con **lápiz**, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.
6. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
7. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta azul o negra indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna pregunta está desordenada, ésta no se calificará.
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. Las ecuaciones, a menos que se indique lo contrario, deben resolverse en el conjunto de los números reales.

Selección única

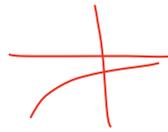
1. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -2^{-x} + 3$ y analice las siguientes proposiciones:

I. f es estrictamente creciente.

II. El ámbito de f es $A =]-\infty, 3[$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Solo la I
B) Solo la II
C) Ambas
D) Ninguna



2. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x+2} + 3$. La gráfica de f es asintótica a la recta de ecuación

- A) $y = -3$
B) $y = -2$
C) $y = 2$
D) $y = 3$

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x-3}$. El corte con el eje Y de la gráfica de f corresponde al punto de coordenadas

- A) $(0, 8)$
B) $(0, 1)$
C) $(0, \frac{1}{8})$
D) $(0, \frac{-1}{8})$

$$f(0) = 2^{0-3} \\ = \frac{1}{8}$$

4. Para la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1$ se cumple que

- A) $f(-1) > f(1)$.
- B) El ámbito es $]1, +\infty[$.
- C) No interseca al eje X .
- D) La ecuación de la asíntota es $x = -1$.

5. Considere la función p cuyo ámbito es $\left]1, \frac{25}{9}\right]$ y criterio $p(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Entonces el dominio de p corresponde al intervalo

- A) $[-2, 0[$
- B) $] -2, 0]$
- C) $[0, 2[$
- D) $]0, 2]$

$1 = \frac{3}{5}^x$		$\frac{25}{9} = \frac{3}{5}^x$
$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}^x$		$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{3}{5}^x$
$0 = x$		$-2 = x$

6. Considere la función exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = k \cdot 3^x + b$. Si la gráfica de f **no interseca** al eje X , ¿cuál de las siguientes proposiciones se puede cumplir?

- A) $k > 0$ y $b < 0$
- B) $k < 0$ y $b < 0$.
- C) $b < 0$ y f es creciente.
- D) $b > 0$ y f es decreciente.

10. Si la inversa de f tiene por criterio $f^{-1}(x) = 2 \log_2(x-1)$, entonces el criterio de f corresponde a

A) $f(x) = \sqrt{2^x} - 1$

B) $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$

C) $f(x) = \sqrt{2^x + 1}$

D) $f(x) = \sqrt{2^x} + 1$

$$x = 2 \log_2(y-1)$$

$$\frac{x}{2} = \log_2(y-1)$$

$$2^{\frac{x}{2}} = y-1$$

$$2^{\frac{x}{2}} + 1 = y$$

$$\sqrt{2^x} + 1 = y$$

11. Considere la función biyectiva $f : D \rightarrow]1, 2[$, $f(x) = \ln x$. El conjunto D es igual a

A) $]1, e[$

B) $]0, e[$

C) $]0, e^2[$

D) $]e, e^2[$

$$\begin{array}{l|l} 1 = \ln x & 2 = \ln e \\ e^1 = x & e^2 = x \\ e = x & \end{array}$$

$$]e, e^2[$$

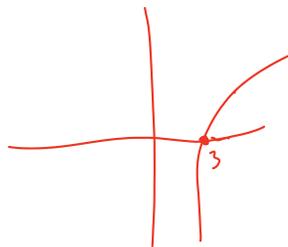
12. Considere la función $f :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(x-2)$. Se puede asegurar que $f(x) > 1$, para todo valor de x que pertenezca a

A) $] -\infty, 5[$

B) $]5, +\infty[$

C) $]2, 3[$

D) $]2, 5[$



?

13. Si $\ln 2 \approx 0,6931$, el valor aproximado de $\ln\left(\frac{4}{\sqrt{e}}\right)$ es

- A) 2,7724
- B) 0,6931
- C) 0,8862**
- D) -0,6138

$$\begin{aligned} \ln 4 - \ln \sqrt{e} \\ \ln 2 + \ln 2 - \ln \sqrt{e} \\ 1,3862 - \end{aligned}$$

14. Si $\log(45) \approx 1,6532$, entonces $\log(450)$ es aproximadamente

- A) 2,6532**
- B) 3,6532
- C) 11,6532
- D) 16,5332

$$\begin{aligned} \log 45 + \log 10 \\ 1,6532 + 1 \end{aligned}$$

15. Si $\log x = 3p$ y $\log y = -p$, entonces $\log\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right)$ es equivalente a

- A) $-2p$
- B) $\frac{2p}{3}$**
- C) $\frac{10p}{3}$
- D) $p + \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log x^2 + \frac{4}{3} \log y^4 \\ \frac{2}{3} \log x + \frac{4}{3} \log y \\ \frac{2 \cdot 3p}{3} - \frac{4p}{3} \\ \frac{2p}{3} \end{aligned}$$

16. La expresión $\log_2(3x) - \log_2 3 + 4 \log_2 x - \log_2(xy)$ es equivalente a

- A) $\log_2\left(\frac{x^4}{y}\right)$ $\log_2 3x - \log_2 3 + \log_2 x^4 - \log_2 xy$
- B) $\log_2\left(\frac{y}{x^4}\right)$ $\log_2 \frac{3x \cdot x^4}{3xy}$
- C) $\log_2(yx^4)$ $\log_2 \frac{x^4}{y}$
- D) $\log_2(x^4y)$

17. Si $P = P_0 \cdot e^{kt}$, entonces t es igual a

- A) $\frac{\ln P_0 - \ln P}{k}$ $P = P_0 \cdot e^{kt}$
- B) $\frac{\ln P - \ln P_0}{k}$ $\frac{P}{P_0} = e^{kt}$
 $\ln \frac{P}{P_0} = kt$
- C) $\frac{\ln P + \ln P_0}{k}$ $\frac{\ln \frac{P}{P_0}}{k} = t$
- D) $\frac{\ln P}{k \ln P_0}$

18. El conjunto solución de $4^{x^2-1} = 16$ corresponde a

- A) $\{-3, 3\}$ $2^{2x^2-2} = 2^4$
- B) $\{-2, 2\}$ $2^{x^2-2} = 4$
- C) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ $2x^2 = 6$
 $x^2 = 3$
 $x = \pm\sqrt{3}$
- D) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

19. La solución de la ecuación $2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$ es un número que pertenece a

- A) $[0, 5]$
- B) $[-5, 0]$
- C) $]5, +\infty[$
- D) $] -\infty, -5[$

20. La solución de la ecuación $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$ es un número que pertenece a

- A) $[0, 4]$
- B) $]4, 8]$**
- C) $]8, 12]$
- D) $]12, 16]$

$$\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = \log 10$$

$$\log \sqrt{3x^2+5} = \log 10$$

$$3x^2+5 = 100$$

$$3x^2-95 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{95}{3}} \approx 5.627$$

21. Si $\ln 2 \approx 0,6931$ y $\ln 5 \approx 1,6094$, la solución de $5^x = 2^{x+5}$ es aproximadamente

- A) 3,78**
- B) 1,56
- C) 0,26
- D) 6,34

$$\ln 5^x = \ln 2^{x+5}$$

$$x \ln 5 = x \ln 2 + 5 \ln 2$$

$$x \ln 5 - x \ln 2 = 5 \ln 2$$

$$x(\ln 5 - \ln 2) = 5 \ln 2$$

$$x(1,6094 - 0,6931) = 5 \cdot 0,6931$$

$$x = \frac{3,4655}{0,9163}$$

$$x = 3,782$$

22. En un polígono regular se pueden trazar 17 diagonales desde un vértice. ¿Qué nombre recibe dicho polígono?

- A) Icoságono.**
- B) Decágono.
- C) Dodecágono.
- D) Endecágono.

$$n-3 = 17$$

$$20 = n$$

23. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular que tiene 20 diagonales en total?

- A) 5
- B) 8**
- C) 10
- D) 18

$$\frac{n(n-3)}{2} = 20$$

$$n(n-3) = 40$$

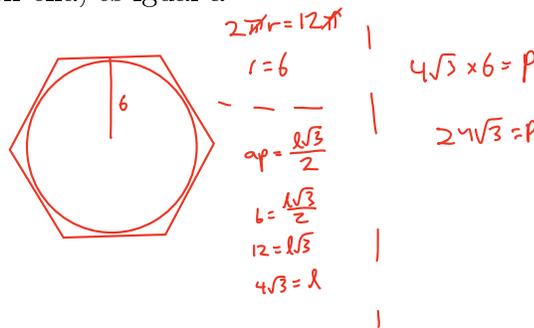
$$n^2 - 3n - 40 = 0$$

n	-3	-40
n	5	-8

$$n = 8$$

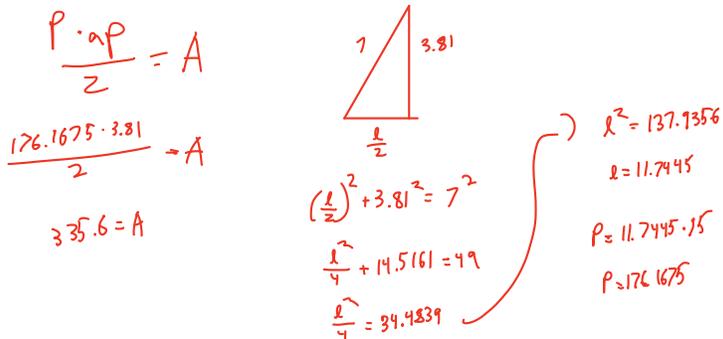
24. Si la longitud de una circunferencia es 12π cm, entonces el perímetro del hexágono regular circunscrito en ella, es igual a

- A) $72\sqrt{3}$ cm
- B) $48\sqrt{3}$ cm
- C) $24\sqrt{3}$ cm**
- D) $12\sqrt{3}$ cm



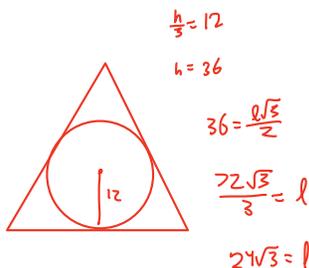
25. Si el radio de un pentadecágono regular es 7 cm y su apotema mide aproximadamente 3,81 cm, entonces su área es aproximadamente

- A) $167,74$ cm²
- B) $335,47$ cm²**
- C) $616,35$ cm²
- D) $670,94$ cm²



26. Si el radio de la circunferencia inscrita a un polígono regular de tres lados mide 12 cm, entonces el lado del polígono mide

- A) 36 cm
- B) 18 cm
- C) $12\sqrt{3}$ cm
- D) $24\sqrt{3}$ cm**



27. Sea un polígono regular en el cual cada ángulo central mide 20° y cada lado mide 12 cm , entonces, el perímetro de ese polígono es igual a

A) 144 cm

B) 216 cm

C) 360 cm

D) 540 cm

$$\frac{360}{n} = 20$$

$$18 = n$$

$$18 \times 12 = 216$$

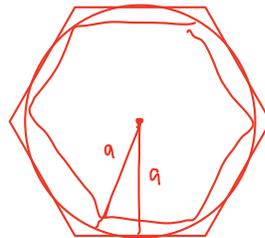
28. Si la medida del lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es de 9 cm , entonces la medida del lado del hexágono regular circunscrito a la misma circunferencia es

A) $6\sqrt{3}\text{ cm}$

B) $3\sqrt{3}\text{ cm}$

C) 12 cm

D) 6 cm



$$9 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{3} = l$$

$$6\sqrt{3} = l$$

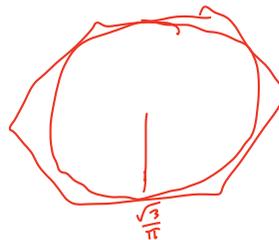
29. Si el perímetro de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia es $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$, entonces la longitud de dicha circunferencia es

A) 3 cm

B) 18 cm

C) $3\pi\text{ cm}$

D) $2\sqrt{3}$



$$6 \cdot l = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

$$6 \cdot l \cdot \pi = 6\sqrt{3}$$

$$l = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

$$ap = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$ap = \frac{3}{2\pi}$$

$$ap = \frac{3}{2\pi}$$

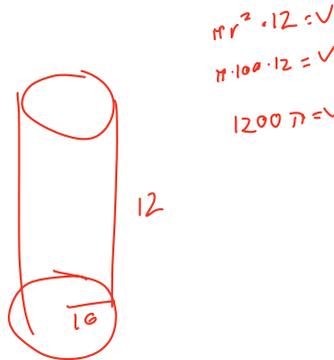
$$2\pi \cdot \frac{3}{2\pi} = x$$

$$\frac{6\pi}{2\pi} = x$$

$$3 = x$$

30. Un cilindro tiene radio de 10 cm y altura de 12 cm. El volumen de ese cilindro es aproximadamente

- A) 1885 cm^3
- B) 3770 cm^3**
- C) 2513 cm^3
- D) 15080 cm^3



31. Si el diámetro de una esfera se reduce en 2, el área total de la esfera resultante es 16π , entonces, el volumen de la esfera original es

- A) 36π**
- B) $\frac{32\pi}{3}$
- C) $\frac{256\pi}{3}$
- D) 288π

Handwritten calculations for problem 31:

$$2r - 2$$

$$4 \cdot \pi r^2$$

$$4 \cdot \pi (2x - 2)^2 = 16\pi$$

$$2x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 + 4 = 4$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = V$$

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot 27}{3} = V$$

$$36\pi = V$$

32. En un prisma recto la base es un decágono regular. Si el área lateral del prisma es 120 cm^2 y el perímetro de la base es 60 cm , entonces la altura del sólido es

- A) 10 cm
- B) 5 cm
- C) 4 cm
- D) 2 cm**

Handwritten calculations for problem 32:

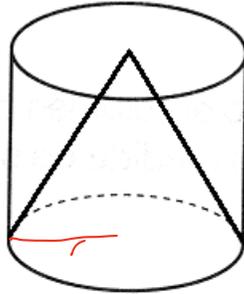
$$P = l \cdot n \quad | \quad AL = h \cdot l \cdot n$$

$$60 = l \cdot 10 \quad | \quad AL = h \cdot 6 \cdot 10$$

$$6 = l \quad | \quad 120 = h \cdot 60$$

$$\quad \quad \quad | \quad 2 = h$$

33. El volumen de un cilindro circunscrito a un cono de volumen 150 cm^3 es



- A) 50 cm^3
- B) 150 cm^3
- C) 300 cm^3
- D) 450 cm^3**

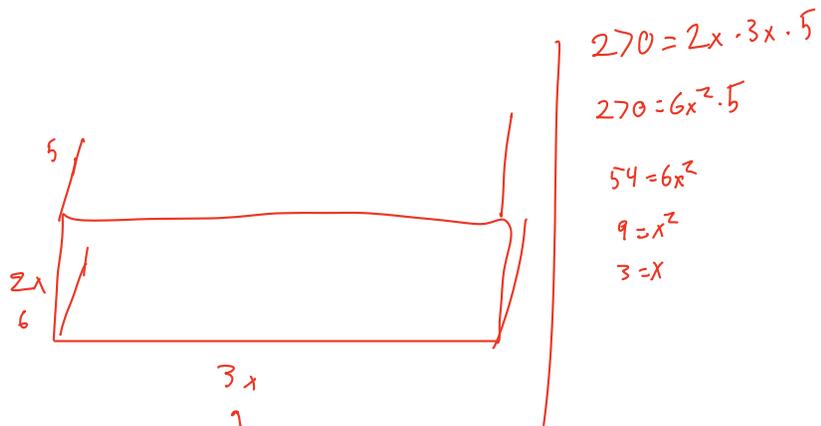
$$150 = \frac{A \cdot h}{3} \quad V_2 = A \cdot h$$

$$450 = A \cdot h \quad V_2 = A \cdot h$$

$$V_2 = 450$$

34. En una caja de base rectangular sin tapa, las dimensiones de la base están en la razón $2 : 3$ y la altura mide 5 dm . Si el volumen del paralelepípedo es 270 dm^3 , entonces el perímetro de la base es

- A) 15 dm
- B) 30 dm**
- C) 45 dm
- D) 90 dm



Fin de la primera parte



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM
Precálculo - Undécimo
III Examen Parcial 2018

Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Pregunta	Puntos
D1	
D2	
D3	

Fórmula: 1

Miércoles 05 de setiembre

II parte: Desarrollo

1. Considere el siguiente problema:

(6 puntos)

La cantidad y de una sustancia (en gramos) radiactiva presente en un cuerpo, transcurridos t años, se modela mediante la fórmula $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$.

- a) Determine la cantidad de sustancia presente en el cuerpo a los 60 meses.
 b) Si en un cuerpo hay 5 gramos de sustancia, ¿cuántos años transcurrieron?

$$\begin{array}{l|l}
 \text{a)} & \text{b)} \\
 y = 80 \cdot 2^{-0,4 \cdot \frac{60}{12}} & 5 = 80 \cdot 2^{-0,4t} \\
 y = 80 \cdot 2^{-0,4 \cdot 5} & \frac{1}{16} = 2^{-0,4t} \\
 y = 80 \cdot 2^{-2} & \log_2 \frac{1}{16} = -0,4t \\
 y = 80 \cdot \frac{1}{4} & -\frac{\log_2 \frac{1}{16}}{0,4} = t \\
 y = 20 & -\frac{-4}{0,4} = t \\
 & 10 = t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2^x = \frac{1}{16} \\
 2^x = 2^{-4}
 \end{array}$$

2. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

(6 puntos)

$$\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$$

$$\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = \log_{10} 100 - \log 25$$

$$\log(2x - 3)(3x - 2) = \log_{10} 4$$

$$6x^2 - 4x - 9x + 6 = 4$$

$$6x^2 - 13x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 6x & -1 \\ 1x & -2 \end{array}$$

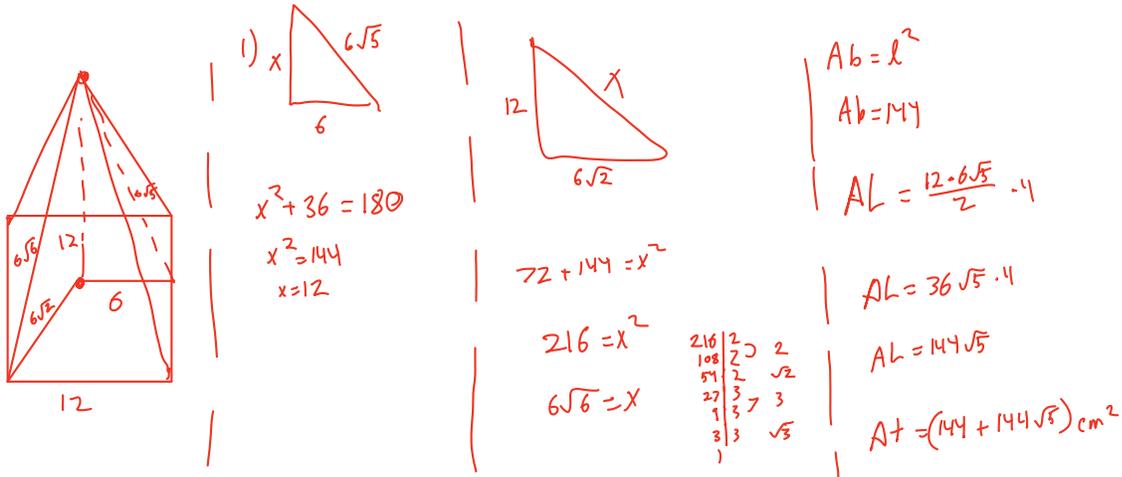
$$(6x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \qquad \downarrow \\ x = \frac{1}{6} \qquad x = 2 \end{array}$$

$$S = \{2\}$$

3. Considere una pirámide recta de base cuadrada. La altura de una cara lateral de dicha pirámide mide $6\sqrt{5}$ cm y el lado de la base mide 12 cm. Determine: (6 puntos)

- La medida de la altura de la pirámide.
- La medida de la arista lateral.
- El área total de la pirámide.



$x^2 + 36 = 180$
 $x^2 = 144$
 $x = 12$

$72 + 144 = x^2$
 $216 = x^2$
 $6\sqrt{6} = x$

$Ab = l^2$
 $Ab = 144$
 $AL = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2} \cdot 4$
 $AL = 36\sqrt{5} \cdot 4$
 $AL = 144\sqrt{5}$
 $AT = (144 + 144\sqrt{5}) \text{ cm}^2$



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM-Precálculo - Undécimo III Examen Parcial 2018- Solucionario

Miércoles 05 de setiembre

I parte: Selección única

- | | |
|-------|-------|
| 1. C | 18. C |
| 2. D | 19. A |
| 3. C | 20. B |
| 4. A | 21. A |
| 5. A | 22. A |
| 6. B | 23. B |
| 7. C | 24. C |
| 8. C | 25. B |
| 9. A | 26. D |
| 10. D | 27. B |
| 11. D | 28. A |
| 12. B | 29. A |
| 13. C | 30. B |
| 14. A | 31. A |
| 15. B | 32. D |
| 16. A | 33. D |
| 17. B | 34. B |

II parte: Desarrollo

1. Considere el siguiente problema: (6 puntos)

La cantidad y de una sustancia (en gramos) radiactiva presente en un cuerpo, transcurridos t años, se modela mediante la fórmula $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$.

- a) Determine la cantidad de sustancia presente en el cuerpo a los 60 meses.
b) Si en un cuerpo hay 5 gramos de sustancia, ¿cuántos años transcurrieron?

Solución:

- a) Como la variable t está definida en años y se indica 60 meses, se tiene que $t = 5$. Al sustituir ese valor en $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$, se tiene:

$$y = 80 \cdot 2^{-0,4 \cdot 5} = 80 \cdot 2^{-2} = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$$

Por lo tanto, la cantidad de sustancia es 20 *mg*.

- b) Al sustituir $y = 5$ en $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$ se tiene:

$$\begin{aligned} 5 &= 80 \cdot 2^{-0,4t} \\ \Rightarrow \frac{5}{80} &= 2^{-\frac{2}{5}t} \\ \Rightarrow \frac{1}{16} &= 2^{-\frac{2}{5}t} \\ \Rightarrow 2^{-4} &= 2^{-\frac{2}{5}t} \\ \Rightarrow -4 &= \frac{-2}{5}t \\ \Rightarrow t &= 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto, transcurrieron 10 años.

2. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

(6 puntos)

$$\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$$

Solución:

$$\begin{aligned} \log(2x - 3) + \log(3x - 2) &= 2 - \log 25 \\ \Rightarrow \log(2x - 3) + \log(3x - 2) + \log 25 &= 2 \\ \Rightarrow \log 25 [(2x - 3)(3x - 2)] &= 2 \\ \Rightarrow 25(2x - 3)(3x - 2) &= 10^2 \\ \Rightarrow 25(6x^2 - 13x + 6) &= 100 \\ \Rightarrow 6x^2 - 13x + 6 &= 4 \\ \Rightarrow 6x^2 - 13x + 2 &= 0 \\ \Rightarrow (6x + 1)(x - 2) &= 0 \\ \Rightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

Pruebas:

- Para $x = \frac{-1}{6}$:

Al sustituir ese valor en la ecuación original, se obtiene un argumento negativo, por lo que no puede ser solución.

- Para $x = 2$:

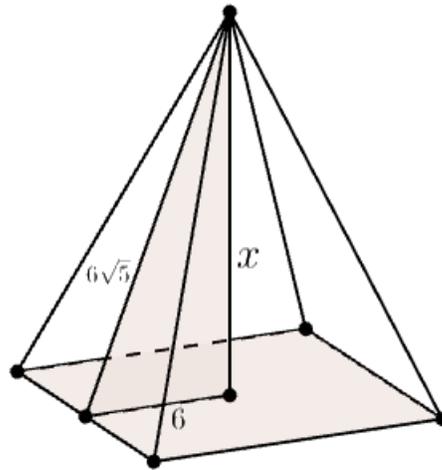
$$\begin{aligned} \log(2 \cdot 2 - 3) + \log(3 \cdot 2 - 2) + \log 25 &= 2 \\ \Rightarrow \log 1 + \log 4 + \log 25 &= 2 \\ \Rightarrow \log 100 &= 2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 2$ si es solución y $S = \{2\}$.

3. Considere una pirámide recta de base cuadrada. La altura de una cara lateral de dicha pirámide mide $6\sqrt{5}$ cm y el lado de la base mide 12 cm. Determine: (6 puntos)

- La medida de la altura de la pirámide.
- La medida de la arista lateral.
- El área total de la pirámide.

Solución:



- Como el lado del cuadrado mide 12 cm, la apotema de la base mide 6 cm. Para determinar la altura x de la pirámide se aplica el teorema de Pitágoras:

$$(6\sqrt{5})^2 = 6^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (6\sqrt{5})^2 - 6^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{180 - 36}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

Por lo tanto, la altura de la pirámide es 12 cm.

- Como el lado del cuadrado mide 12 cm, su diagonal mide $12\sqrt{2}$ cm, es decir, el radio del cuadrado mide $6\sqrt{2}$ cm. Para determinar la medida de la arista lateral

y , también se aplica el teorema de Pitágoras:

$$(6\sqrt{2})^2 + 12^2 = y^2$$

$$\Rightarrow y = 6\sqrt{6}$$

Por lo tanto, la medida de la arista lateral es $6\sqrt{6}$ *cm*.

- El área total de la pirámide: $A_T = (144 + 144\sqrt{5})$ *cm*²
 - Área basal: $A_B = 12^2 = 144$
 - Área lateral: $A_L = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2} \cdot 4 = 144\sqrt{5}$