Instituto Tecnológico de Costa Rica

I examen parcial
Precálculo
Décimo anual 2021-2022

Lunes 27 de setiembre de 2021

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (15 puntos), respuesta corta (15 puntos) y de desarrollo (20 puntos).
3. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen bien definidas en $\mathbb{R}$.
4. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
5. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
6. Durante la prueba no se permite el uso de celulares, calculadora científica u otros dispositivos electrónicos.
7. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
8. La prueba debe resolverse individualmente.
9. Dispone de 3 horas para resolver la prueba.
10. Durante el periodo de aplicación de la prueba debe aplicar correctamene los protocolos definidos, en particular utilizar la mascarillas y guardar el distanciamiento establecido.

Nombre: ____

Código: ______________________

Colegio: ____

I Parte. Selección Única.

Valor: 15 puntos

A continuación se le presentan 15 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela con una X. Vale un punto cada respuesta correcta.

1. Si la medida del lado de un cuadrado es $\frac{15}{\sqrt{6}}$ cm entonces su perímetro, en cm, corresponde a

   $\frac{15}{\sqrt{6}} \cdot 4 = \frac{60}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{60\sqrt{6}}{6} = 10\sqrt{6}$

   (a) $\frac{75}{2}$

   (b) $\frac{60}{4\sqrt{6}}$

   (c) $10\sqrt{6}$

   (d) $\frac{15\sqrt{6}}{6}$

2. Para racionalizar el denominador de $\frac{5}{2+\sqrt[3]{4}}$ se pueden multiplicar el numerador y el denominador por la expresión

   $4 - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2}$

   $4 - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$

   $\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$

   (a) $2+\sqrt[3]{4}$

   (b) $2-\sqrt[3]{4}$

   (c) $4+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$

   (d) $4-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$

3. El resultado de la operación $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{b-a}$ corresponde a

   $\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{b-a}{1}}$

   $\frac{b-a}{ab} \cdot \frac{1}{b-a}$

   $\frac{1}{ab}$

   (a) ab

   (b) $\frac{1}{ab}$

   (c) $\frac{1}{ab(b-a)}$

   (d) $\frac{1}{b^2-a^2}$

4. Si $P(x)$ es una fracción algebraica tal que $P(x) \div \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ entonces $P(x)$ corresponde a

(a) $\dfrac{x-2}{(x-1)^3}$

(b) $\dfrac{(x-1)^3}{x-2}$

(c) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

(d) $\dfrac{x-1}{x-2}$

$P(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x-2}{x-1}$

$P(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^3}$

5. El resultado simplificado de la operación $\dfrac{2x}{1-x} + \dfrac{3x}{x+1}$ corresponde a

(a) $\dfrac{5x}{1-x^2}$

(b) $\dfrac{5-x^2}{x^2-1}$

(c) $\dfrac{x^2-5}{x^2-1}$

(d) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$\dfrac{2x\cdot(x+1) + 3x\cdot(1-x)}{(1-x)(x+1)}$

$2x^2 + 2x + 3x - 3x^2$

$\dfrac{5x-x^2}{(1-x)(x+1)}$

$\dfrac{5x-x^2}{x+1-x^2-x} = \dfrac{5x-x^2}{1-x^2}$ $\quad \dfrac{-(5x-x^2)}{(x^2-1)}$ $\quad \dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

6. ¿Cuántas soluciones reales diferentes tiene la ecuación $(x+3)(x+4) = (x+3)(x+4)^2$?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

$(x+3)(x+4) = (x+3)(x+4^2)$

$(x+3)(x+4) - (x+3)(x+4)^2 = 0$

$(x+3)(x+4)(1-x-4) = 0$

$x=-3$ $\quad x=-4$ $\quad 1-x-4=0$

$1-4=x$

$-3=x$

7. Si una solución de la ecuación $ax^2 - 6x - 4 = 0$ es el número $\dfrac{3-\sqrt{65}}{14}$ entonces el valor de a corresponde a

$\Delta = 0$

(a) 14

$(-6)^2 - 4\cdot -4 \cdot a = \Delta$

(b) 7

$36 + 16a = \Delta$

(c) -7

(d) -14

$\dfrac{6-\sqrt{36+16a}}{2a}$

$\cancel{\dfrac{6-\sqrt{4(9+4a)}}{2a}}$

$\dfrac{6-2\sqrt{9+4a}}{2a}$

$\dfrac{2(3-\sqrt{9+4a})}{2a}$

$\dfrac{3-\sqrt{9+4a}}{a} = \dfrac{3-\sqrt{65}}{14}$

8. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt{x} = x - 6$?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) infnitas

$x = (x-6)^2$
$x = x^2 - 12x + 36$
$x^2 - 13x + 36 = 0$
$x \quad -4$
$x \quad -9$
$x = 4 \quad x = 9$

$\Delta = 169 - 4 \cdot 36$
$\Delta = 169 - 144$

$\sqrt{4} = 4 - 6$
$2 = -2$
$\sqrt{9} = 9 - 6$
$3 = 3$

9. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{x^2+5}{x+2} = \dfrac{1-4x}{x+2}$?

(a) $\{2, -2\}$

(b) $\{2\}$

(c) $\{-2\}$

(d) $\{\}$

$x \neq 2$
$x^2 + 5 = 1 - 4x$
$x^2 + 4x + 4$
$x \quad 2$
$x \quad 2$
$(x+2)^2$
$x = -2$

10. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $-2\,|3 - 2x| + 12 = 0$?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) infinitas

$|3 - 2x| = 6$

11. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{(2-x)^2} - 3 = 0$?

(a) $\{1\}$

(b) $\{-1\}$

(c) $\{3, -3\}$

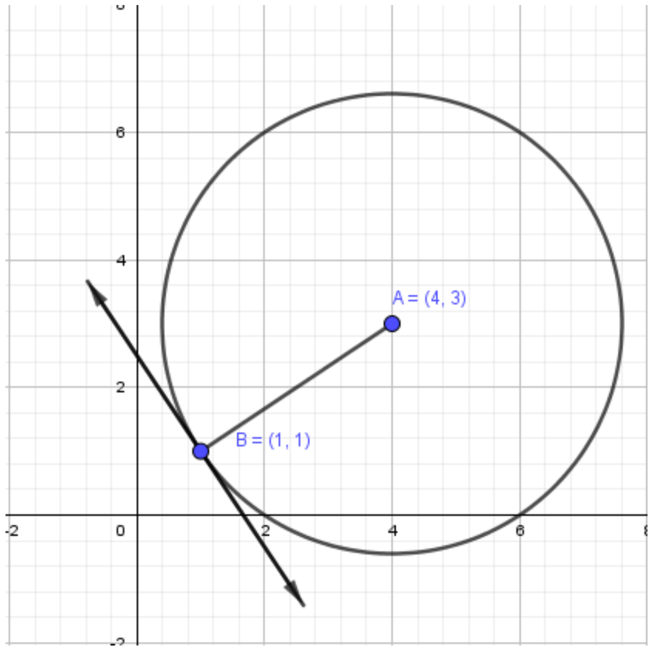
(d) $\{5, -1\}$

$|2 - x| - 3 = 0$
$|2 - x| = 3$

$2 - x = 3$
$2 - 3 = x$
$-1 = x$

$2 - x = -3$
$2 = x - 3$
$5 = x$

12. Considere la recta tangente en $B(1,1)$ a la circunferencia de centro $A(4,3)$. ¿Cuál es la pendiente de esa recta?



(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{-2}{3}$

(d) $\frac{-3}{2}$

$m = \frac{3-1}{4-1}$

$m = \frac{2}{3}$

$m_2 = \frac{-3}{2}$

13. Considere una circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas $(3,0)$ y que es tangente al eje de las ordenadas. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a otra recta tangente a esa circunferencia?

(a) $y = x$

(b) $y = 6$

(c) $x = 6$

(d) $x = -3$

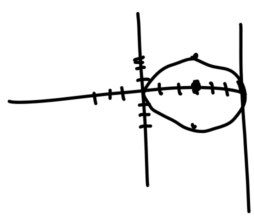
$x \quad y$

$3,0 \quad 0,0$

$d = \sqrt{(3-0)^2 + (0+0)^2}$

$d = \sqrt{9}$

$d = 3$



14. Considere la recta L_1 que contiene a los puntos de coordenadas $(\overset{x_1}{-2}, \overset{y_1}{5})$ y $(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{-3})$ y la recta L_2 de ecuación $8x + 7y = 2$. Se puede asegurar que L_1 y L_2

$8x+7y=2$

$7y=-8x+2$

$y=\frac{-8}{7}x+2$

$m=\frac{-3-5}{5+2}$

$m=\frac{-8}{7}$

(a) son paralelas.

(b) son la misma recta.

(c) se intersecan perpendicularmente.

(d) se intersecan pero sin formar ángulos rectos.

15. Las ecuaciones de dos rectas paralelas son $y = \dfrac{2x-5}{3}$ y $y = kx + 1$. Se puede asegurar que el valor de k es

(a) 2

(b) $\dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{3}{2}$

(d) $\dfrac{-3}{2}$

II Parte. Respuesta corta. Valor: 15 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado. Vale un punto cada respuesta correcta.

1. Determine la factorización completa de los siguientes polinomios:

(a) (1 punto) $x^4 + 10x^2 + 9 =$ $(x^2+9)(x^2+1)$

$x^2 \quad 9$

$x^2 \quad 1$

$(x^2+9)(x^2+1)$

(b) (2 puntos) $(x^2-3)(3x-2) + (2x-3)(-3x+2) =$ $x(x-2)(3x-2)$

$(x^2-3)(3x-2)-(3x-2)(2x-3)$

$(3x-2)\ (x^2-3\ -2x+3)$

$(3x-2)(x^2-2x) = x(x-2)(3x-2)$

(c) (2 puntos) $ax^3 + bx^3 + a + b =$ $(x+1)(x^2-x+1)(a+b)$

$(ax^3+bx^3)+(a+b)$

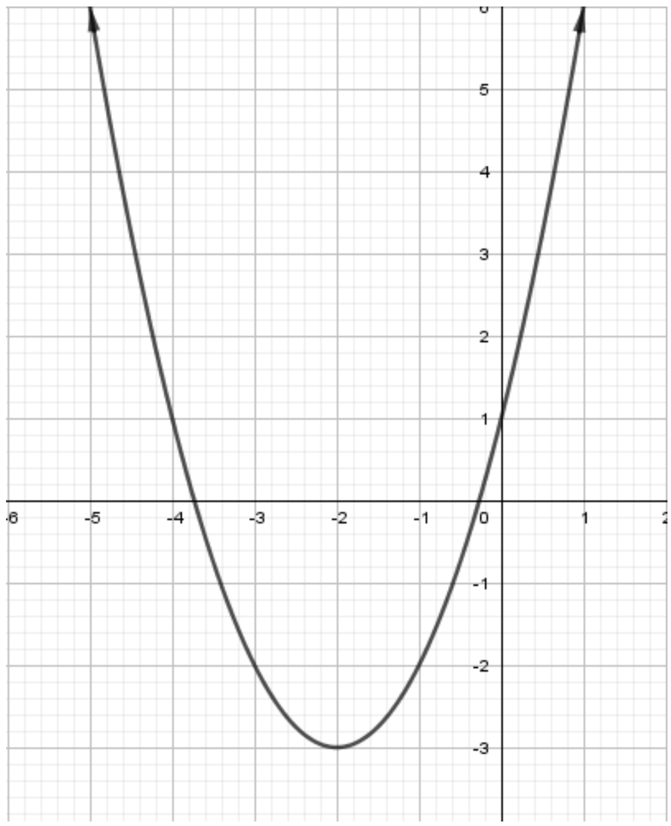
$x^3(a+b)+1(a+b)$

$(x^3+1)(a+b)=0$

$(x+1)(x^2-x+1)(a+b)$

2. Considere la parábola de la siguiente gráfica cuya ecuación es de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ e indique:

x y



(a) El valor de $h =$ 2

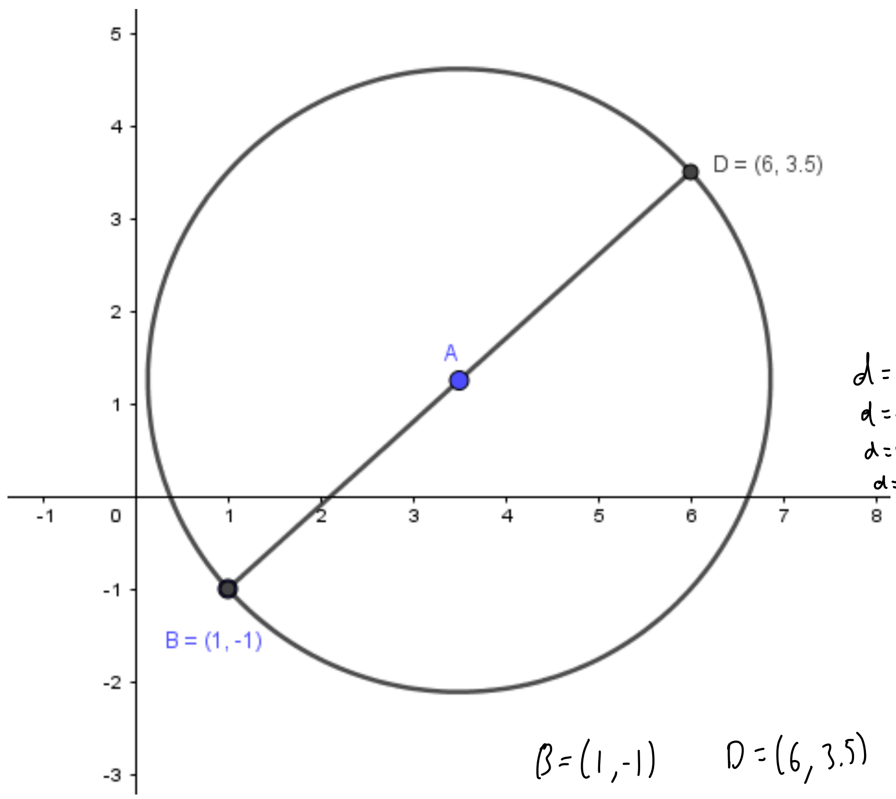
(b) El valor de $k =$ - 3

(c) El signo de a Positivo

(d) La ecuación del eje de simetría: x = -2

(e) Signo del discriminante del polinomio $a(x - h)^2 + k$: Positivo

3. Considere la circunferencia K de centro A de la siguiente figura. Si B y D son extremos de un diámetro indique lo siguiente:



$d = \sqrt{(1-6)^2 + (-1-\frac{7}{2})^2}$

$d = \sqrt{(-5)^2 + (\frac{-2}{2} - \frac{7}{2})^2}$

$d = \sqrt{25 + (\frac{9}{2})^2}$

$d = \sqrt{25 + \frac{81}{4}}$

$d = \sqrt{\frac{181}{4}}$ 181

$d = \frac{\sqrt{181}}{2}$

$B = (1, -1)$ $D = (6, 3.5)$ $3 + \frac{1}{2}$

$D = (6, \frac{7}{2})$ $\frac{1}{2}$

(a) Coordenadas del punto A: $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$

$\left(\frac{1+6}{2}, \frac{-1+3.5}{2}\right)$ $2 + \frac{1}{2}$

(b) Medida del diámetro de K: $\frac{\sqrt{181}}{2}$

$\frac{4}{2} + \frac{1}{2}$

$\dfrac{\frac{\sqrt{181}}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{181}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{181}}{4}\right)^2 = \frac{181}{16}$

$\frac{7}{2}, \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{1}}$ $\frac{5}{2}$

(c) Ecuación de la circunferencia K: $(x-\frac{7}{2})^2 + (y-\frac{5}{4})^2 = \frac{181}{16}$

$(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$

(d) ¿La recta de ecuación $y = x$ es tangente, secante o exterior a la circunferencia K? Secante

$(x-\frac{7}{2})^2 + (x-\frac{5}{2})^2 = \frac{181}{4}$

(e) ¿La circunferencia K es tangente, secante, interior o exterior a la de ecuación $x^2 + y^2 = 64$? interiores

Centro: 3.5, 1.25
Radio: 45.25

Centro: 0,0
Radio: 8

$d = \sqrt{(1.25)^2 + (3.5)^2}$
$d = 1.5625 + 12.25$
$d = 13.8$

Suma = 53.25
Resta = 37.25

III Parte. Desarrollo.

Valor: 20 puntos.

Instrucciones: Resuelva de forma completa y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. (4 puntos) Racionalice el numerador de la siguiente expresión y simplifique al máximo.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x} - 2}{128 - 2x^3} \cdot \frac{\sqrt{x^2-3x}+2}{\sqrt{x^2-3x}+2} = \frac{(x^2-3x-4)}{(128-2x^3)(\sqrt{x^2-3x}+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{2(64-x^3)(\sqrt{x^2-3x}+2)}$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{2(4-x)(16+4x+x^2)(\sqrt{x^2-3x}+2)}$$

$$\frac{x+1}{-2(16+4x+x^2)(\sqrt{x^2-3x}+2)}$$

2. Encuentre las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

   (a) (5 puntos)

$$(x^3 - x)^2 = 36$$

$$x^3 - x = \pm 6$$

$$(x^3-x-6)(x^3-x+6)$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -6 & 2 \\ & 2 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 6 & -2 \\ & -2 & 4 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+2x+3) \qquad (x+2)(x^2-2x+3)$$

$$x=2 \qquad \Delta = 4-4\cdot 3\cdot 1 \qquad x=-2 \qquad \Delta = 4-4\cdot 3\cdot 1$$

$$\Delta = -8 \qquad \Delta = -8$$

$$\emptyset \qquad \emptyset$$

(b) (3 puntos)

$$\frac{x+1}{x-2}+1=\frac{5}{2-x}$$

$$\frac{x+1+1(x-2)}{x-2}=\frac{-5}{x-2}$$

$$\frac{x+1+x-2}{x-2}=\frac{-5}{x-2} \qquad x\neq 2$$

$2x-1=-5$

$2x=-4$

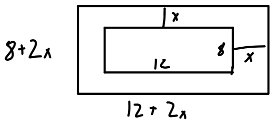
$x=\frac{-4}{2}$

$x=-2$

$S=\{-2\}$

3. (4 puntos) Resuelva el siguiente problema:

Un jardín rectangular de 12m de largo y 8m de ancho se rodea de un camino de ancho uniforme. El área del total del terreno del jardín y el camino es de 165 m^2. ¿Cuál es el ancho del camino?



En ancho del camino es de 1.5 metros

$(8+2x)(12+2x) = 165$

$96+16x+24x+4x^2-165=0$

$4x^2+40x-69=0$

$2x \quad 46 \quad 23$

$2x \quad -6 \quad -3$

$(2x+23)(2x-3)=0$

$2x=-23 \qquad 2x=3$

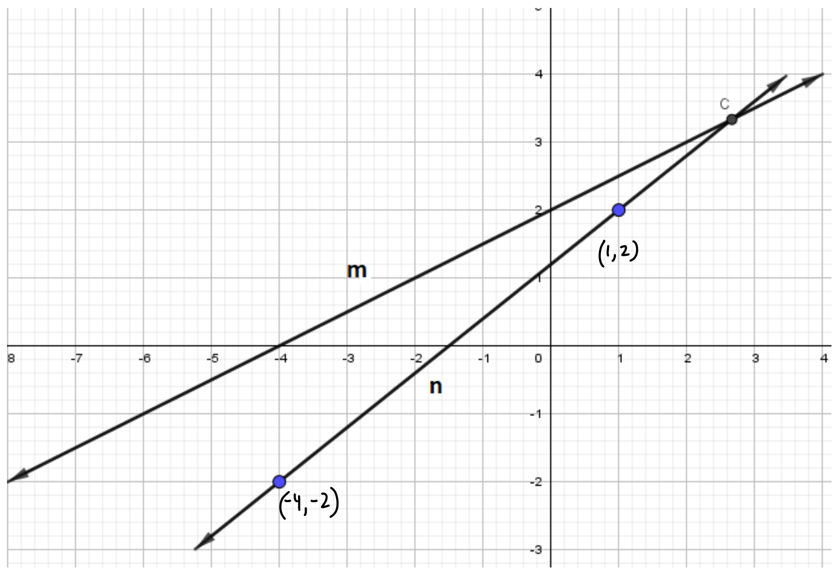
$x=\frac{-23}{2} \qquad x=\frac{3}{2}$

x ✓

4. Considere las rectas n y m de la siguiente gráfica. La ecuación de la recta m es $-x + 2y = 4$. Determine:

(a) (2 puntos) La ecuación de la recta n.

(b) (2 puntos) La abscisa del punto C.



a)
$$m = \frac{2+2}{1+4}$$
$$m = \frac{4}{5}$$
$$b = 2 - \frac{4}{5}\cdot 1$$
$$b = \frac{10}{5} - \frac{4}{5}$$
$$b = \frac{6}{5}$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$$

b)
$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases}$$
$$-x + 2\left(\frac{4x+6}{5}\right) = 4$$
$$-x + \frac{8x+12}{5} = 4$$
$$\frac{-x\cdot 5 + 8x + 12}{5} = \frac{4\cdot 5}{5}$$
$$8x - 5x + 12 = 20$$
$$3x = 20 - 12$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$