Instituto Tecnológico de Costa Rica

II examen parcial
Precálculo
Décimo anual 2019-2020
Primera Parte

Sábado 23 de noviembre de 2019

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (20 puntos), respuesta corta (10 puntos) y de desarrollo (20 puntos).
3. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen bien definidas en $\mathbb{R}$.
4. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
5. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
6. No se permite el uso de celulares.
7. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
8. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
9. La prueba debe resolverse individualmente.
10. Dispone de 3 horas para resolver la prueba.

Nombre: ____

Código: ______________________

Colegio: ____

I Parte. Selección Única.

Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Un número que es solución para la inecuación $x - x\sqrt{3} < 2 - 2\sqrt{3}$ corresponde a

   (A) -2

   (B) 0

   (C) 2

   (D) 4

   $x(1-\sqrt{3}) < 2(1-\sqrt{3})$

   Negativo

   $x > 2$

2. ¿Cuántos números enteros positivos son solución de la inecuación $-4x - 4 > 2(x+4)$?

   (A) 0

   (B) 1

   (C) 2

   (D) infinitos

   $-4x-4 > 2x+8$

   $-6x > 12$

   $x < -2$

3. El conjunto solución de la desigualdad $-x^2 - x - 1 < 0$ corresponde a

   (A) $\varnothing$

   (B) $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$

   (C) $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

   (D) $\mathbb{R}$

   $-1(x^2+x+1) < 0$

   $x^2+x+1 > 0$

   $x \quad 1$

   $x \quad 1$

   $\Delta = 1 - 4\cdot 1\cdot 1$

   $\Delta = -3$

	$-\infty$ … $+\infty$
x^2+x+1	$+$
	$+$

   $\mathbb{R}$

4. El conjunto solución de la desigualdad $x^2(x-2) \geq 0$ corresponde a

   (A) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

   (B) $]0, 2]$

   (C) $[2, +\infty[\cup \{0\}$

   (D) $]-\infty, 2]$

	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
x^2	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$-$	$+$

5. El conjunto solución de la desigualdad $|x| < 2$, corresponde a

(A) $]-2, 2[$

$-2 < x < 2$

(B) $]0, 2[$

(C) $]2, +\infty[$

(D) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

6. El conjunto solución de la desigualdad $|3 - x| \leq -5$ corresponde a

(A) $[-8, 2]$

$5 \leq 3 - x \leq -5$

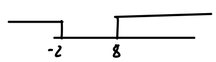
(B) $[-2, 8]$

$2 \leq -x \leq -8$

$-2 \geq x \geq 8$

(C) $\varnothing$

(D) $\mathbb{R}$



7. Considere el enunciado *"El volumen V de la esfera de radio r está dada por $V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3}$"*. De acuerdo con el enunciado anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. r es la variable independiente.

II. $V(3r) = 3V(r)$

$V(3r) = \dfrac{4\pi(3r)^3}{3}$

$= \dfrac{4\pi\, 27 r^3}{3}$

$= \dfrac{108\pi r^3}{3}$

$= 36\pi r^3$

$3\left(\dfrac{4\pi r^3}{3}\right) = \dfrac{12\pi r^3}{3} = 4\pi r^3$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(A) Ninguna

(B) Ambas

(C) Solo I

(D) Solo II

8. Considere las siguientes relaciones:

   I. $g : \mathbb{Z} - \{-1\} \to \mathbb{Z}$ con $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ Los resultados son fracciones

   II. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = x$

   III. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $h(x) = \sqrt{x}$

   De ellas, ¿cuáles corresponden a una función?

   (A) I y II

   (B) I y III

   (C) II Y III

   (D) I, II y III

9. Sea $g(x) = x^2 - 4$ donde $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, entonces $g(-2) + g(0)$ corresponde a

   (A) -4

   $g(-2) = (-2)^2 - 4$
   $= 4 - 4$
   $= 0$

   $g(0) = (0)^2 - 4$
   $= 0 - 4$
   $= -4$

   (B) -2

   (C) 0

   $0 + -4 = -4$

   (D) 8

10. Si $G_h = \{(-2,4), (-1,3), (0,2), (1,1), (2,2), (3,-1)\}$ es el gráfico de la función h, analice las siguientes proposiciones:

    I. La imagen de -1 es 3.

    II. 2 tiene solamente una preimagen.

    ¿cuáles son verdaderas?

    (A) Solo I

    (B) Solo II

    (C) Ambas

    (D) Ninguna

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = ax^2 - a^2x + 2$. Si $(-2, 0)$ pertenece al gráfico de f entonces el valor de a corresponde a

$f(-2) = a(-2)^2 - a^2(-2) + 2$

$= 4a + 2a^2 + 2$

$4a + 2a^2 + 2 = 0$

$2a^2 + 4a + 2 = 0$

$2(a^2 + 2a + 1) = 0$

$a = -1$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

12. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por $g(x) = 9 - x^2$. Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de g interseca al eje de abscisas corresponde a

$0 = 9 - x^2$

$0 = (3+x)(3-x)$

$(3,0)$ $(-3,0)$

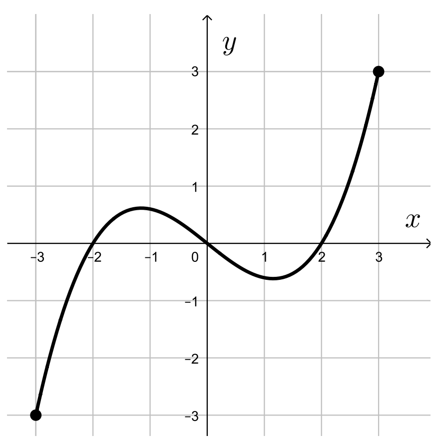
(A) solamente $(-3, 0)$

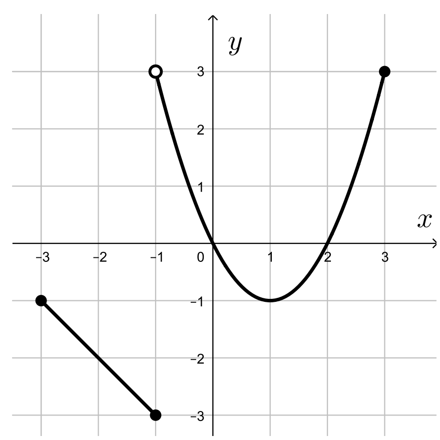
(B) solamente $(9, 0)$

(C) solamente $(-9, 0)$ y $(9, 0)$

(D) solamente $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

13. Sea $f : [-3, 3] \to [-3, 3]$ y $g : [-3, 3] \to [-3, 3]$ las funciones de la gráfica adjunta.





El resultado de $(g \circ f)(-3) - g(-1)$

$f(-3) = -3$

$g(-1) = -3$

$g(-3) = -1$

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 2

$-1 - -3 = 2$

14. Considere las funciones f y g definidas en su dominio máximo, tales que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$; entonces la función $\frac{f}{g}$ tiene como dominio máximo al conjunto

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R} - \{-1\}$

(C) $\mathbb{R} - \{1\}$

(D) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{f}{g}$$

$x^2 - 1 \neq 0$

$(x+1)(x-1) \neq 0$

$x \neq -1 \quad x \neq 1$

15. Si $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un función tal que su ámbito es el conjunto de los números reales y su gráfica interseca al eje x en dos puntos, entonces se puede asegurar que k

(A) es inyectiva pero no sobreyectiva.

(B) es sobreyectiva pero no inyectiva.

(C) no es inyectiva ni sobreyectiva.

(D) es inyectiva y sobreyectiva.

16. Considere dos números reales a y b en la función definida por $f : \{a, b\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Analice las siguientes proposiciones:

I. f es inyectiva.

II. f es biyectiva.

Entonces con certeza, son verdaderas

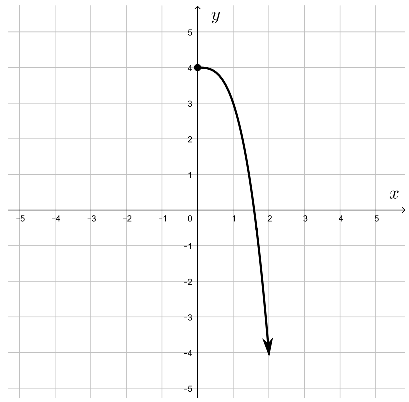
(A) solo I

(B) solo II

(C) ambas

(D) ninguna

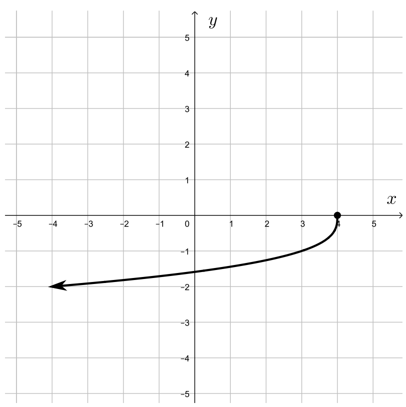
17. Sea la función $h : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 4]$, cuyo criterio es $h(x) = -x^3 + 4$ y su gráfica es la siguiente:



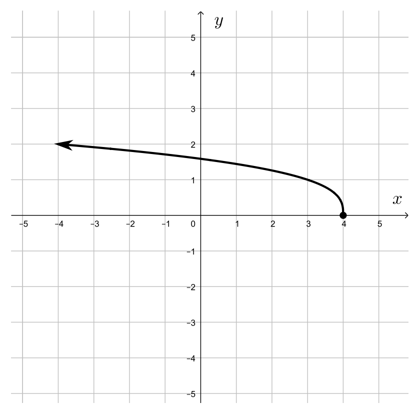
$]-\infty, 4[\rightarrow [0, +\infty[$

¿Cuál de las siguiente gráficas es la representación de la función inversa de h?

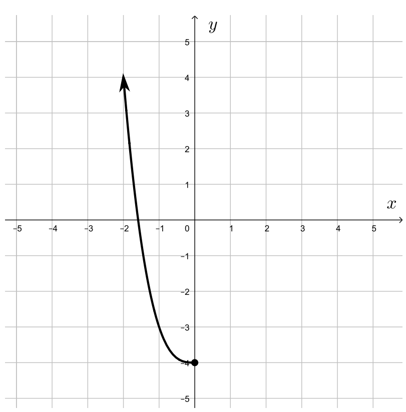
(A)



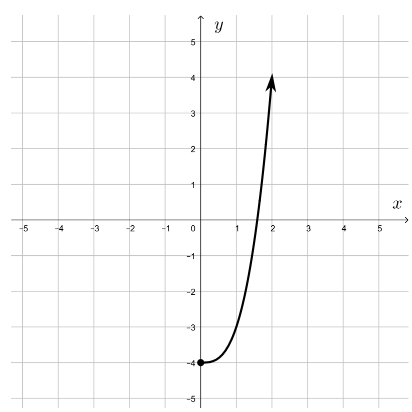
(C)



(B)



(D)



18. Si el criterio de la función $h :]3, +\infty[\to]0, +\infty[$ es $h(x) = x^2 - 6x + 9$, entonces el criterio de su función inversa corresponde a

(A) $h^{-1}(x) = x^2 + 3$

(B) $h^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3$

(C) $h^{-1}(x) = -x^2 + 3$

(D) $h^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$

$y = x^2 - 6x + 9$

$y = (x-3)^2$

$\pm\sqrt{y} = x - 3$

$\pm\sqrt{y} + 3 = x$

$\sqrt{x} + 3 = h^{-1}(x)$

19. El punto de intersección con el eje de ordenadas de la recta dada por la ecuación $4y = 2(3 - 2x) - 6$, corresponde a

(A) $(0, 6)$

(B) $(0, 0)$

(C) $(0, -6)$

(D) $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

X

$4(0) = 2(3-2x) - 6$

$0 = 6 - 4x - 6$

$0 = -4x$

$0 = x$

Y

$4y = 2(3 - 2(0)) - 6$

$4y = 2(3) - 6$

$4y = 6 - 6$

$4y = 0$

$y = 0$

20. Dada la función lineal sobreyectiva $g : A \to B$, donde $A =]-3, 5]$ es el dominio. Si el criterio es $g(x) = -2x - 5$, entonces el conjunto B corresponde a

(A) $]-15, 1]$

(B) $[-15, 1[$

(C) $]-5, -1]$

(D) $[-5, -1[$

Cuanto es y en -3

$g(-3) = -2(-3) - 5$

$= 6 - 5$

$= 1$

Imagen de 5

$g(5) = -2(5) - 5$

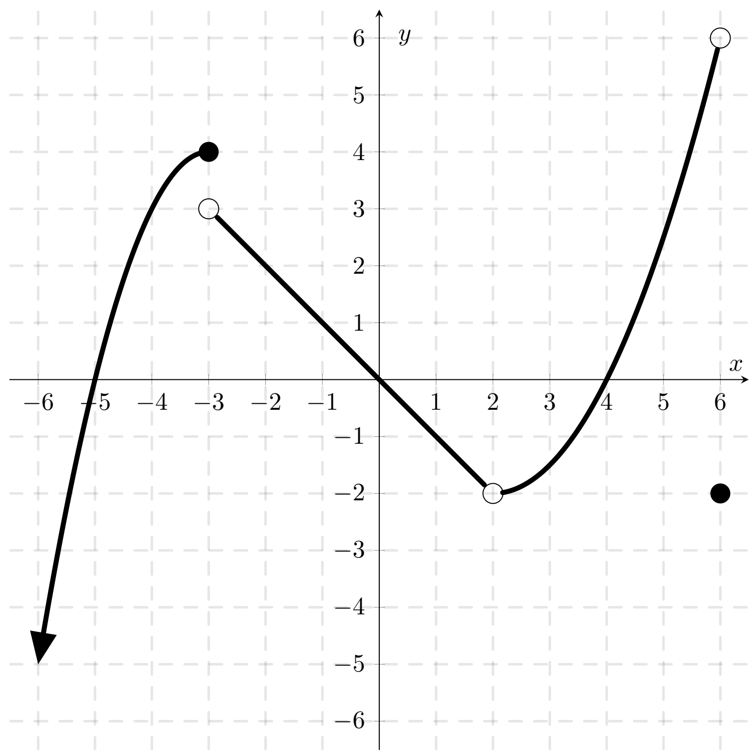
$= -10 - 5$

$= -15$

II Parte. Respuesta corta. Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en la hoja de respuestas.

Tome en consideración la función $g : D_g \to \mathbb{R}$, donde D_g es el dominio máximo, y la gráfica de g es la que se presenta a continuación.



Determine:

1. Dominio. $]-\infty, 6] - \{2\}$
2. Ámbito. $]-\infty, 6[$
3. Un intervalo donde la función es creciente.
   $]-\infty, -3[\,,\,]2, 6[$
4. Un intervalo donde la función es decreciente.
   $]-3, 2[$
5. El conjunto solución de $f(x) > 0$.
   $]-5, 0[\cup]4, 6[$
6. Un intervalo donde $f(x) \leq 0$.
   $]-\infty, -5] \cup [0, 4] \cup \{6\}$
7. Imagen de -3.
   4
8. Preimagen de -2.
   6
9. Imagen de 4.
   0
10. Cantidad de preimágenes de 3.
    2

Instituto Tecnológico de Costa Rica

II examen parcial
Precálculo
Décimo anual 2019-2020
Segunda Parte

Sábado 23 de noviembre de 2019

Nombre: ____

Código: ______________________

Colegio: ____

I Parte. Selección Única. Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 casillas. Escriba, EN MAYÚSCULA, la letra que escogió para su respectivo enunciado.

1		4		7		10		13		16		19	
2		5		8		11		14		17		20	
3		6		9		12		15		18			

II Parte. Respuesta corta. Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Escriba su respuesta en el espacio correspondiente.

1. ____________ 6. ____________

2. ____________ 7. ____________

3. ____________ 8. ____________

4. ____________ 9. ____________

5. ____________ 10. ____________

III Parte. Desarrollo. Total: 20 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación. 5 puntos

$$\frac{-1}{x^2-5x+6} \leq \frac{2}{(x-3)^2}$$

$x \quad -2$

$x \quad -3$

$$\frac{-1}{(x-2)(x-3)} \leq \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$0 \leq \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$0 \leq \frac{2(x-2)+1(x-3)}{(x-3)^2(x-2)}$$

$$0 \leq \frac{2x-4+x-3}{(x-3)^2(x-2)}$$

$$0 \leq \frac{3x-7}{(x-3)^2(x-2)}$$

	$-\infty$ 2	2 $\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$ 3	3 $+\infty$
$3x-7$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$ 0	$+$
$x-2$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$+$

$$S =]-\infty, 2] \cup [\tfrac{7}{3}, +\infty[- \{3\}$$

2. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con criterio: 5 puntos

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{4} & , \text{ si } \quad x < -2 \\ \\ 3 - 2x^2 & , \text{ si } \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Indique los puntos de intersección de la función h con los ejes cartesianos y grafique la función en el plano cartesiano.

$h(x) = \frac{2x-1}{4}$

con "x"

$\frac{2x-1}{4} = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$h(-2) = \frac{2(-2)-1}{4} = \frac{-5}{4}$

$\left(-2, \frac{-5}{4}\right)$

$h(-4) = \frac{2(-4)-1}{4} = \frac{-9}{4}$

$\left(-4, \frac{-9}{4}\right)$

$h(x) = 3 - 2x^2$

con "x"

$3 - 2x^2 = 0$

$3 = 2x^2$

$\frac{3}{2} = x^2$

$\pm\sqrt{\frac{3}{2}} = x$

con "y"

$h(0) = 3 - 2(0)^2$

$= 3 - 0$

$= 3$

$(0, 3)$

Vertice

$\frac{-0}{-4} = 0 \to x$

$-2x^2 - 0x + 3$

$\Delta = 0 - 4 \cdot -2 \cdot 3$

$\Delta = 24$

$\frac{-24}{4 \cdot -2} = 3$

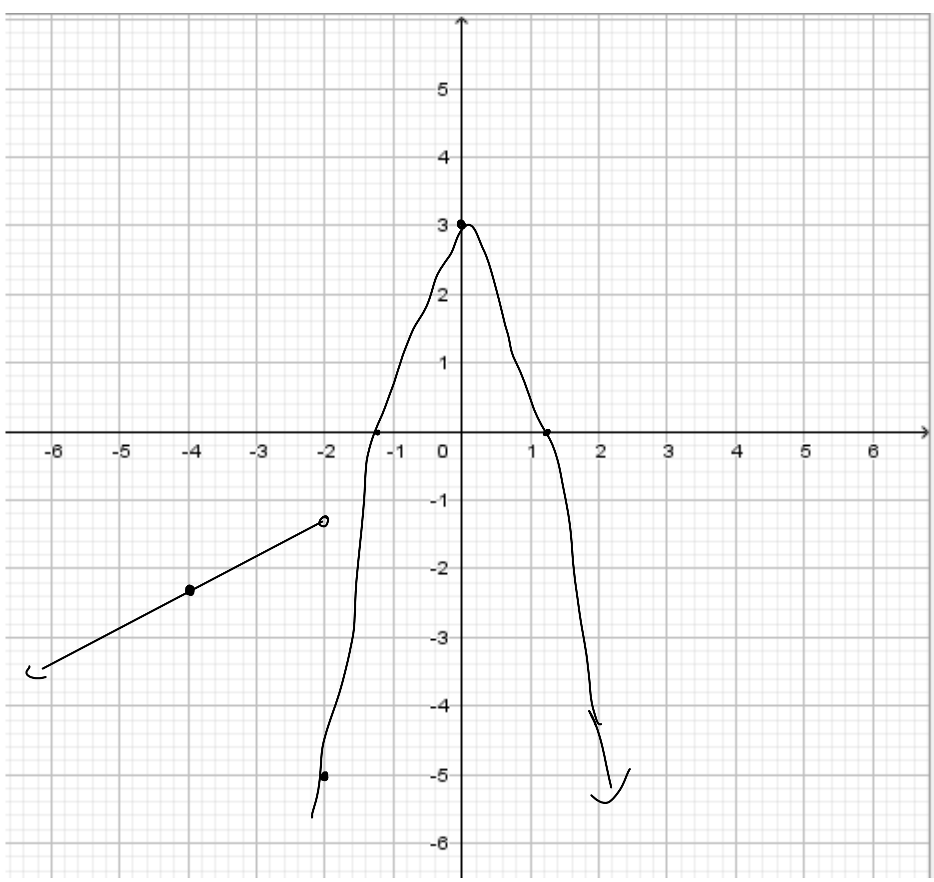
Imagen de -2

$h(-2) = 3 - 2(2)^2$

$= 3 - 8$

$= -5$

$(-2, -5)$



3. Considere la función $f : D_f \to \mathbb{R}$, donde D_f es su dominio máximo, cuyo criterio es:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x\,(2x-10)}} - \frac{1}{\sqrt[5]{4-x}}$$

Determine D_f. 5 puntos

Restricciones

$4 - x \neq 0$; $x(2x-10) \neq 0$

$4 \neq x$; $x \neq 0$; $2x - 10 \neq 0$

$x \neq 5$

Raíces

$$\frac{3-x}{x(2x-10)} \geq 0$$

	$-\infty$ 0	0 3	3 5	5 $+\infty$
$3-x$	+	+	−	−
x	−	+	+	+
$2x-10$	−	−	−	+
	+	−	+	−

$S =]-\infty, 0[\cup [3, 5[$

$$D_f =]-\infty, 0[\cup [3, 5[- \{4\}$$

4. Angélica y su mamá quieren comprar manzanas para compartir con su familia. En el mercado venden 8 manzanas en 2200 colones, y 5 manzanas en 1450 colones. Si se supone que la relación entre la unidad y precio de las manzanas es lineal, y se toma x como la cantidad manzanas que quieren comprar,

(a) exprese el precio de las manzanas en función de x. ¿Cuánto debe pagar por una manzana? 2 puntos

x = manzanas

P = precio total

Precio x manzana ← $m = \frac{2200-1450}{8-5} = \frac{750}{3} = 250$

$P(x) = 250x + 200$

$b = y - mx = b$

$1450 - 250(5) = b$

$1450 - 1250 = b$

$200 = b$

(b) Si el vendedor les comenta que por cada manzana que compren les puede hacer un descuento de 50 colones, exprese el nuevo precio de las manzanas en función de x. Con esta rebaja, ¿cuánto deben pagar si quieren comprar 10 manzanas? 3 puntos

$P(x) = 200x + 200$

$P(10) = 200(10) + 200$

$= 2000 + 200$

$= 2200$