De donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\frac{-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x^2+4}}{2-3x}\\
=\quad&\frac{\sqrt[3]{3x^2+4}-2\sqrt[3]{x}}{2-3x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2}{\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2}\\
=\quad&\frac{\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^3-(2\sqrt[3]{x})^3}{(2-3x)\left[\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2\right]}\\
=\quad&\frac{3x^2+4-8x}{(2-3x)\left[\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2\right]}\\
=\quad&\frac{(3x-2)\,(x-2)}{(2-3x)\left[\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2\right]}\\
=\quad&\frac{-\,(-3x+2)\,(x-2)}{(2-3x)\left[\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2\right]}\\
=\quad&\frac{-\,(x-2)}{\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2},\ \text{con } x\neq\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo que al racionalizar el numerador y simplificar la expresión $\dfrac{-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x^2+4}}{2-3x}$ se obtiene:

$$\frac{-\,(x-2)}{\left(\sqrt[3]{3x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x^2+4}+(2\sqrt[3]{x})^2},\ \text{con } x\neq\frac{2}{3}.$$

★

Nota: *Cuando se racionaliza una expresión, puede que la racionalización y simplificación de la misma produzca una expresión que a la vista parece ser más complicada que la expresión original, como las presentadas en los ejemplos 97 y 98. Sin embargo, recuerde que el objetivo de la racionalización no es que la expresión resultante sea menos complicada, sino, eliminar de una parte de la expresión lo no racional*

Ejercicios 1.10

1. Para cada caso, escriba la expresión por la que se debe multiplicar para racionalizar el denominador:

   a) $\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x+1}+3}$ R/ $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2-3\sqrt[3]{x+1}+9}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2-3\sqrt[3]{x+1}+9}$.

b) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{8x^2yz^3}}$ R/ $\dfrac{\sqrt[5]{2^2x^3y^4z^2}}{\sqrt[5]{2^2x^3y^4z^2}}$.

2. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones, y simplifique al máximo la expresión resultante:

a) $\dfrac{4-x^2}{x-2\sqrt{x-1}}$ R/ $\dfrac{(x+2)(x+2\sqrt{x-1})}{2-x}$.

b) $\dfrac{2y^2-x}{x-2y\sqrt{x-y^2}}$ R/ $\dfrac{2y\sqrt{x-y^2}+x}{2y^2-x}$.

c) $\dfrac{36x-32}{5-3\sqrt{2x+1}}$ R/ $-6\sqrt{2x+1}-10$.

d) $\dfrac{-4x^2+10x-6}{2x-2\sqrt{x^2+x-1}}$ R/ $(2x-3)\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)$.

e) $\dfrac{3x^2-6y}{x+\sqrt{2y}}$ R/ $3x-3\sqrt{2y}$.

f) $\dfrac{8-2x^2}{3x-2\sqrt{1-4x}}$ R/ $\dfrac{(x-2)(6x+2\sqrt{1-4x})}{2-9x}$.

g) $\dfrac{9x^3-11x^2-14x}{5+3\sqrt{2-x}}$ R/ $x(x-2)(5-3x\sqrt{2-x})$.

h) $\dfrac{-2b+4}{b\sqrt{3}+2\sqrt{b^2-1}}$ R/ $\dfrac{2b\sqrt{3}-4\sqrt{b^2-1}}{b+2}$.

i) $\dfrac{5-4x}{2\sqrt{x+1}-3}$ R/ $-2\sqrt{x+1}-3$.

j) $\dfrac{-2x^2+8}{\sqrt{3}x+2\cdot\sqrt{x^2-1}}$ R/ $2x\sqrt{3}-4\sqrt{x^2-1}$.

3. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones, y simplifique al máximo la expresión resultante:

a) $\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt[3]{x+3}}$ R/ $-(x+5)\left(\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+4\right)$.

b) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2}+2}$ R/ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2\sqrt[3]{2}+4$.

c) $\dfrac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{h}}$ R/ $\dfrac{h\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+h\sqrt[3]{h(x+h)}+\left(\sqrt[3]{h}\right)^5}{x}$.

d) $\dfrac{a-1}{a-\sqrt[3]{2a^2-2a+1}}$

R/ $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2a^2-2a+1}\right)^2+a\sqrt[3]{2a^2-2a+1}+a^2}{a^2-a+1}$.

a) $\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x+1}+3} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x+1}^{\,2} - 3\sqrt[3]{x+1}+9}{\sqrt[3]{x+1}^{\,2}-3\sqrt[3]{x+1}+9} =$

b) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{8x^2yz^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{2^2x^3y^4z^2}}{\sqrt[5]{2^2x^3y^4z^2}} =$

a) $\dfrac{4-x^2}{x-2\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{x+2\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}} = \dfrac{4-x^2(x+2\sqrt{x-1})}{x^2-2(x+1)} = \dfrac{4-x^2(x+2\sqrt{x-1})}{x^2-4x+4} = \dfrac{(2-x)(2+x)(x+2\sqrt{x-1})}{x^2-4x+4} = \dfrac{-(x-2)(2+x)(x+2\sqrt{x-1})}{(x-2)^2}$

$x \quad -2$
$x \quad -2$

$\dfrac{-(2+x)(x+2\sqrt{x-1})}{x-2}$

b) $\dfrac{2y^2-x}{x-2y\sqrt{x-y^2}} \cdot \dfrac{x+2y\sqrt{x-y^2}}{x+2y\sqrt{x-y^2}} \cdot \dfrac{(2y^2-x)(x+2y\sqrt{x-y^2})}{x^2-4y^2(x-y^2)} \cdot \dfrac{(2y^2-x)(x+2y\sqrt{x-y^2})}{x^2-4y^2x+4y^4} = \dfrac{(2y^2-x)(x+2y\sqrt{x-y^2})}{(2y^2-x)^2}$

$x-4y^2x+4y^4$

$-x \quad 2y^2$
$-x \quad 2y^2$

$\dfrac{x+2y\sqrt{x-y^2}}{2y^2-x}$

c) $\dfrac{36x-32}{5-3\sqrt{2x+1}} \cdot \dfrac{5+3\sqrt{2x+1}}{5+3\sqrt{2x+1}} = \dfrac{(36x-32)(5+3\sqrt{2x+1})}{25-9(2x+1)} = \dfrac{-4(8-9x)(5+3\sqrt{2x+1})}{16-18x} = \dfrac{-4(8-9x)(5+3\sqrt{2x+1})}{2(8-9x)}$

$\dfrac{-4(5+3\sqrt{2x+1})}{2} = -2(5+3\sqrt{2x+1})$

e) $\dfrac{3x^2-6y}{x+\sqrt{2y}} \cdot \dfrac{x-\sqrt{2y}}{x-\sqrt{2y}} = \dfrac{(3x^2-6y)(x-\sqrt{2y})}{x^2-2y} = \dfrac{3(x^2-2y)(x-\sqrt{2y})}{x^2-2y} = 3(x-\sqrt{2y}) = 3x-3\sqrt{2y}$

$$h)\ \frac{-2b+4}{b\sqrt{3}+2\sqrt{b^2-1}} \cdot \frac{b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1}}{b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1}} = \frac{(-2b+4)(b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1})}{3b^2-4(b^2-1)} = \frac{2(b-4)(b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1})}{3b^2-4b^2+4} = \frac{2(b-2)(b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1})}{b^2+4}$$

$$\frac{2(b-2)(b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1})}{(b+2)(b-2)} = \frac{2(b\sqrt{3}-2\sqrt{b^2-1})}{b+2} = \frac{2b\sqrt{3}-4\sqrt{b^2-1}}{b+2}$$

$$i)\ \frac{5-4x}{2\sqrt{x+1}-3} \cdot \frac{2\sqrt{x+1}+3}{2\sqrt{x+1}+3} = \frac{(5-4x)(2\sqrt{x+1}+3)}{4(x+1)-9} = \frac{(5-4x)(2\sqrt{x+1}+3)}{4x+4-9} = \frac{-(4x-5)(2\sqrt{x+1}+3)}{4x-5} = -(2\sqrt{x+1}+3)$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x+1}-3$$